ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 9 | **Juni 1929** | **Heft 3**

Inhalt:

	Seite
Hauptaufsätze. H. Hausen: Ueber die Theorie des Wärmeaustausches in Regeneratoren	173
W. Müller: Systeme von Doppelquellen in der ebenen Strömung, insbesondere die Strömung um zwei Kreiszylinder	200
F. Löbell: Zum Problem der Hauptschubspannungslinien in plastischen Stoffen	213
K. Kommerell: Das Inertialsystem	225
F. Baur: Zur Theorie der linearen Mehrfachkorrelation	231
Kurze Auszüge. Neuere polnische Arbeiten über Mechanik	241
Kleine Mitteilungen. Strutt: Die Ladungsverteilung auf zwei ungleichen parallelen kreiszylindrischen Leitern	247
Buchbesprechungen. Mann: Theorie der Rahmentragwerke auf neuer Grundlage. — Flügge: Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten. — Pichler: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. — Federhofer: Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. — Löwy: Druckschwankungen in Druckrohrleitungen. — Bader: Handbuch für Flugzeugführer. — Fraenkel: Einleitung in die Mengenlehre. — Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. — Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie. — Walther: Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. — Hänert: Geschütz und Schuß. — Auerbach: Lebendige Mathematik. — Pertz: Die Bestimmung der Baustoffdämpfung nach dem Verdrehungsausschwingverfahren. — Weiter eingegangene Bücher	250
Nachrichten	256

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Theorie des Wärmeaustausches in Regeneratoren.[1]

Von **HELMUTH HAUSEN** in Höllriegelskreuth bei München.

Einleitung. Die Bezeichnungen »Regenerator« und »Rekuperator« sollen dem in der Hüttenindustrie üblichen Sprachgebrauch entsprechend für folgende technische Einrichtungen zum Wärmeaustausch zwischen zwei Gasen mit verschiedener Ausgangstemperatur benutzt werden. Beim »Rekuperator« wird ein rohr- oder kanalähnlich ausgebildetes System von beiden Gasen in kontinuierlichem Strom derart durchflossen, daß die Gase ihre Wärme durch Zwischenwände hindurch austauschen. Beim »Regenerator« wird hingegen dieselbe Oberfläche einer zur Wärmespeicherung dienenden Masse abwechselnd vom warmen und kalten Gas bespült. Ein ununterbrochener Betrieb erfordert wenigstens zwei Regeneratoren, damit während der Kaltperiode eines der Regeneratoren das warme Gas in einem anderen Regenerator abgekühlt werden kann und umgekehrt.

Da im Regenerator im Gegensatz zum Rekuperator infolge des Umschaltens auch lange nach der Inbetriebsetzung noch zeitliche Temperaturänderungen stattfinden, so ist die Theorie des Regenerators wesentlich verwickelter als die des Rekuperators. Eine genaue Theorie ist bisher nur für die erste Erwärmung oder Abkühlung der Regeneratormasse bei der Inbetriebsetzung entwickelt worden, und zwar von Anzelius[2]) und unabhängig davon ausführlicher und allgemeiner von Nußelt[3]), der außerdem den Grenzfall des unendlich häufigen Umschaltens behandelt hat[4]).

---

[1]) Auszug aus der Habilitationsschrift des Verfassers vom Febr. 1927. — Der Gesellschaft für Linde's Eismaschinen A.-G. in Höllriegelskreuth bei München bin ich zu besonderem Dank dafür verpflichtet, daß sie mir die Anregung zu vorliegender Arbeit gegeben und mir ihre Durchführung ermöglicht hat.

[2]) A. Anzelius, Ueber Erwärmung vermittels durchströmender Medien. Diese Zeitschr. Bd. 6 (1926), S. 291.

[3]) W. Nußelt, Die Theorie des Winderhitzers, VDI-Zeitschr. 1927, S. 85. — Die wichtigsten früheren Arbeiten über Regeneratoren sind angegeben in: E. Herzog, Der heutige Stand unserer Kenntnisse vom Siemensmartinofen, S. 12 u. f., Bericht Nr. 120 des Ver. Deutsch. Eisenhüttenleute, Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1927.

[4]) Erst nach Abfassung vorliegender Abhandlung sind noch folgende Arbeiten über den Beharrungszustand des Regenerators erschienen: W. Nußelt, Der Beharrungszustand im Winderhitzer. VDI-Zeitschr. Bd. 72 (1928), S. 1052. — W. Schmeidler, Mathematische Theorie der Wärmespeicherung, Diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 385.

Im nachfolgenden werden die zeitlichen und örtlichen Temperaturänderungen des Regenerators in demjenigen streng periodischen Dauerzustand exakt berechnet, welcher sich bei stets gleichbleibender, aber beliebig langer Umschaltdauer nach unendlich langer Zeit einstellt. Zunächst soll wegen seiner wirtschaftlichen Ueberlegenheit nur der Fall der entgegengesetzten Strömungsrichtung beider Gase behandelt werden, doch können, wie am Schlusse gezeigt wird, die Betrachtungen mit geringen Abänderungen auch auf den Fall des Gleichstroms übertragen werden.

Der Grundgedanke der zu entwickelnden Theorie besteht darin, den im Regenerator sich abspielenden Vorgang als erzwungene Temperaturschwingung aufzufassen und diese in Eigenschwingungen zu zerlegen [1]).

1. Annahmen für die Berechnung. Die Berechnung soll unter folgenden Annahmen durchgeführt werden:

1. Die Wärmeleitfähigkeit der Speichermasse sei quer zur Strömungsrichtung des Gases unendlich groß, in der Längsrichtung hingegen unendlich klein. Diesen Fall kann man angenähert durch eine sehr feine Unterteilung der Speichermasse verwirklichen, da dann die einzelnen Teilchen auch in ihrem Innern die Temperatur ihrer Oberfläche fast sofort annehmen und auch für nicht weit auseinanderliegende Teilchen der gegenseitige Wärmeaustausch sehr erschwert ist.

2. Die Warm- und Kaltperiode sollen gleich lang sein und in beiden Perioden gleiche Gasmengen von gleicher spezifischer Wärme mit derselben unveränderlichen Geschwindigkeit hindurchströmen. Entsprechend sei auch die Wärmeübergangszahl zwischen Gas und Speichermasse in beiden Perioden gleich groß und längs des Regenerators unveränderlich.

3. In jeder Periode soll das Gas mit zeitlich unveränderlicher Temperatur in den Regenerator eintreten.

4. Die noch näher zu erörternden Störungen, welche durch das Umschalten selbst bewirkt werden, die aber nur bei sehr kurzer Periodendauer stärker in die Erscheinung treten, sollen vernachlässigt werden.

Es wird sich im Verlauf der Rechnungen zeigen, daß die unter diesen Annahmen entwickelte Theorie auf Grund von Aehnlichkeitsbetrachtungen auch auf allgemeinere Fälle angewendet werden kann, in denen ein Teil der vorstehenden Voraussetzungen nicht erfüllt ist.

2. Der ideale Regenerator. Die in der Annahme 4 erwähnten Störungen zeigen sich am deutlichsten im Grenzfall des unendlich häufigen Umschaltens. Jedes Gasteilchen kann dann bei der üblichen Betriebsweise während einer Periode, worunter die Zeitdauer zwischen zwei aufeinander folgenden Umschaltungen verstanden sei, nur einen unendlich kurzen Weg zurücklegen. Ferner muß die unendlich kleine Gasmenge, welche am einen Regeneratorende eintritt, in der folgenden Periode an demselben Ende wieder austreten, möglicherweise etwas verunreinigt durch die im Regenerator schon vorher vorhandene Gasmasse. Ein praktisch bedeutsamer Wärmeaustausch zwischen den beiden Gasen verschiedener Temperatur ist also unmöglich. Der Hauptwärmeaustausch besteht vielmehr darin, daß die im Regenerator hin- und herschwingende Gasmasse dieselbe unendlich kleine Wärmemenge unendlich oft an die Speichermasse überträgt und wieder von ihr aufnimmt.

Die Erscheinung, daß die in den Regenerator eintretenden Gase anstatt ihn vollständig zu durchströmen, in der entgegengesetzten Richtung wieder austreten, tritt teilweise auch bei längerer Periodendauer auf. Ist z. B. die Periodendauer 10 mal so lang als die Zeit, welche ein Gasteilchen braucht, um vom einen Regeneratorende zum anderen zu gelangen, dann strömt die während der ersten $^9/_{10}$ der Periode eintretende Gasmenge vollständig durch den Regenerator hindurch; alle im letzten Zehntel der Periode eintretenden Gasteilchen strömen hingegen nur mehr oder weniger tief in den Regenerator hinein und werden nach der Umschaltung in umgekehrter Richtung wieder hinausgestoßen. Dies bedeutet insofern eine Störung, als sich dieses letzte Zehntel der ersten Gasart mit $^9/_{10}$ der zweiten Gasart mischt. Diese Verunreinigung macht sich um so weniger bemerkbar, je länger die Periodendauer ist.

---

[1]) Ein einfacheres Verfahren zur näherungsweisen Berechnung soll demnächst ausführlich veröffentlicht werden. Vergl. den kurzen Bericht in der VDI-Zeitschr. Bd. 73 (1928), S. 431.

Für die nachfolgenden Rechnungen werde ein idealer Regenerator vorausgesetzt, bei dem die beschriebene Störung beseitigt ist. Die Regeneratormasse sei von Längskanälen durchzogen, die überall gleichen Querschnitt haben. Für jeden Kanal stehe rechts und links je ein beweglicher Kolben bereit, der genau in den Kanalquerschnitt hineinpaßt. In Abb. 1 ist ein solcher Kanal dargestellt. Das Gas I ströme zunächst bei geöffneten Ventilen a und b und bei der eingezeichneten Kolbenstellung von links nach rechts. Ist eine genügende Menge von Gas I eingeströmt, so wird das Ventil a geschlossen und der noch im Kanal befindliche Rest von Gas I durch Bewegung des Kolbens I bis ans rechte Ende durch das Ventil b hinausgeschoben. Jetzt erst wird b geschlossen und unter Rückbewegung des Kolbens I tritt von d aus das Gas II in den Kanal ein. Damit beginnt für Gas II derselbe Vorgang wie vorher für Gas I, nur in umgekehrter Richtung, wobei dann schließlich Kolben II durch Linksbewegung den letzten Gasrest aus Ventil c hinausschiebt. Bei dieser Arbeitsweise tritt also kein Gas rückwärts durch den Regenerator wieder heraus. Falls auch die schädlichen Räume an den Ventilen vernachlässigbar klein sind, so können die Gase beim Umschalten nicht verunreinigt werden.

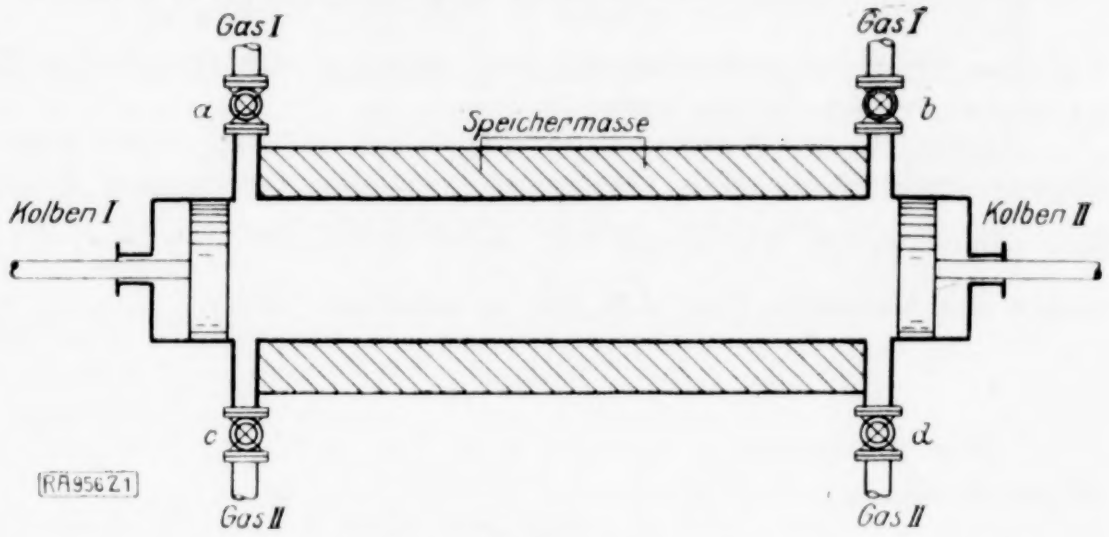


Abb. 1. Idealer Regenerator.

Dieses Verfahren ist auch noch anwendbar, wenn die in einer Periode eintretende Gasmenge kleiner ist als der Rauminhalt des Kanals. Wir denken uns zunächst beide Kolben am linken Ende und dann Kolben II wieder nach rechts geschoben, bis die gewünschte Menge von Gas I eingeströmt ist. Hierauf werden beide Kolben unter gleichbleibendem Abstand und unter Mitnahme der eingeschlossenen Gasmenge nach rechts bewegt. Schließlich wird Gas I, ähnlich wie oben beschrieben, durch das Ventil b ausgestoßen. Der beschriebene Vorgang ist, wenigstens theoretisch, auch bei unendlich kleiner Gasmenge durchführbar.

Während beim wirklichen Regenerator Umschaltzeit und Periodendauer gleich sind, muß beim idealen Regenerator entsprechend der nachfolgenden Festsetzung zwischen beiden unterschieden werden. »Umschaltzeit« sei die Zeit zwischen Eintrittsbeginn des ersten und Eintrittsbeginn des zweiten Gases. »Periodendauer« sei hingegen die Zeit, die verläuft, bis das eine der beiden Gase an einer beliebigen Stelle des Kanals vollständig vorbeigeströmt ist. Die Periodendauer ist somit beim idealen Regenerator stets kleiner als die Umschaltzeit und zwar um den Zeitbetrag, der für ein Gasteilchen erforderlich ist, um vom einen Ende des Regenerators zum entgegengesetzten zu gelangen. Im Grenzfall der unendlich kleinen Gasmenge je Periode ist also bei endlicher Gasgeschwindigkeit nur die Periodendauer unendlich klein, nicht aber die Umschaltzeit.

In praktischen Fällen spielt der Unterschied zwischen Umschaltzeit und Periodendauer kaum eine Rolle. Bei einer Umschaltdauer von nur 2 min, einer Regeneratorlänge von 2 m und einer Strömungsgeschwindigkeit von 2 m/sek beträgt z. B. der Unterschied nur 1 sek, d. h. weniger als 1 vH der Umschaltzeit. Die im nachfolgenden für den idealen Regenerator entwickelte Theorie kann daher ohne merklichen Fehler auch auf wirkliche Regeneratoren angewendet werden.

3. Aufstellung der Differentialgleichungen. Die Differentialgleichungen ergeben sich aus der Wärmebilanz[1]) für ein Regeneratorelement von der Länge dx während der Zeit dz. Zur Vereinfachung der Ableitung soll hierbei die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Volumens des Gases vernachlässigt werden, da sie, wie sich nachweisen läßt, auf das Endergebnis ohne Einfluß ist. Das Gas ströme mit der unveränderlichen Geschwindigkeit w in Richtung der positiven x-Achse. Ist V die in der Zeiteinheit durch-

[1]) Vergl. Anzelius, a. a. O.

strömende Gasmenge, gemessen in cbm bei beliebigem Normalzustand, und ϑ die Gastemperatur, so strömt die Gasmenge $V \cdot dz$ an der Stelle x mit der Temperatur ϑ ein und an der Stelle $x + dx$ mit der Temperatur $\vartheta + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_z dx$ wieder aus. Die durchströmende Gasmenge nimmt daher die Wärmemenge

$$dQ_1 = V \cdot dz \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_z \cdot dx$$

aus dem Regeneratorelement mit fort, wenn c_p die spezifische Wärme von 1 cbm Gas bei gleichbleibendem Druck bedeutet.

Eine zweite Wärmemenge dQ_2 wird dadurch verbraucht, daß sich zur Zeit z im Regeneratorelement eine Gasmenge von der Temperatur ϑ, zur Zeit $z + dz$ hingegen eine gleich große Gasmenge von der Temperatur $\vartheta + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_x dz$ befindet. Da diese Gasmasse das Volumen $V/w \cdot dx$ hat, so erhalten wir

$$dQ_2 = \frac{V}{w} \cdot dx \cdot c_p \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_x \cdot dz .$$

Der Wärmebedarf $dQ = dQ_1 + dQ_2$ wird dadurch gedeckt, daß eine ebenso große Wärmemenge

$$dQ_3 = \alpha \cdot H \cdot dx \cdot (t - \vartheta) \cdot dz$$

von der Speichermasse an das Gas übertragen wird, wobei α die Wärmeübergangszahl, H die wärmeübertragende Fläche (»Heizfläche«) pro Längeneinheit des Regenerators und t die Temperatur der Speichermasse bedeutet. Aus der Gleichheit von dQ und dQ_3 folgt:

$$\frac{V \cdot c_p}{\alpha \cdot H} \cdot \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_z + \frac{1}{w} \cdot \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_x\right] = t - \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da die Wärmemenge dQ_3 aus dem Wärmevorrat der Speichermasse stammt, so ist auch

$$dQ_3 = -C\,dx \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_x dz ,$$

wenn mit C die Wärmekapazität der Speichermasse pro Längeneinheit bezeichnet wird. Durch Vergleich mit dem obigen Ausdruck für dQ_3 erhalten wir somit

$$\frac{C}{\alpha \cdot H} \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_x = \vartheta - t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Die Gleichungen (1) und (2) sind die gesuchten Differentialgleichungen, die sich aber noch vereinfachen lassen. An Stelle der Zeit z führen wir die Gasmenge v ein, die zur Zeit z an der Stelle x vorbeigeströmt ist. v soll den Wert Null haben, wenn ein beliebig herausgegriffenes Gasteilchen $(dv)_0$ an die Stelle x gelangt. Geschieht dies zur Zeit z_0, dann wird

$$v = V \cdot (z - z_0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

z_0 selbst ist von x abhängig, da das Gasteilchen $(dv)_0$ die Zeit $z_0 = x/w$ braucht, um von der Stelle 0 an die Stelle x zu gelangen. Da somit nach (3)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_v = \left(\frac{\partial z_0}{\partial x}\right)_v = \frac{1}{w} ,$$

so folgt

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_z + \frac{1}{w} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Ferner ergibt sich nach (3)

$$\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_x = \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)_x \cdot V \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Durch Einsetzen von (4) und (5) in (1) und (2) erhalten die Differentialgleichungen folgende Gestalt

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_v = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} (t - \vartheta) \quad . \quad . \quad (6), \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial v}\right)_x = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} (\vartheta - t) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Die Einführung von v an Stelle von z kommt gewissermaßen darauf hinaus, daß wir die Zeit, wie wir es schon beim idealen Regenerator zur Definition der Periodendauer getan haben, an der durchströmenden Gasmenge messen. Mit dieser Definition steht auch in Einklang, daß die Zeitdauer einer Unterbrechung, wie sie z. B. durch das Umschalten eines idealen Regenerators bedingt ist, durch v nicht mitgezählt wird.

Wir können die Differentialgleichungen noch weiter vereinfachen, wenn wir

$$\frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot x = \xi \quad . \quad . \quad (8) \qquad \text{und} \qquad \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot v = \eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

setzen. Dann erhalten wir

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right)_\eta = t - \vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (10), \qquad \left(\frac{\partial t}{\partial \eta}\right)_\xi = \vartheta - t \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Durch diese Umformung ist es also gelungen, den zeitlichen und örtlichen Temperaturverlauf im Regenerator, der zunächst von den sieben Veränderlichen α, H V, c_p, C, x und v abhängt, als Funktion von nur zwei Größen ξ und η darzustellen, die wir als reduzierte Länge und reduzierte Zeit bezeichnen wollen. Drücken wir auch die gesamte Regeneratorlänge L und die Periodendauer, die wieder durch die durchströmende Gasmenge V_0 definiert sei, in diesem reduzierten Maße aus, so erhalten wir

$$\text{reduzierte Regeneratorlänge } \Lambda = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

$$\text{reduzierte Periodendauer} \qquad \Pi = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot V_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

In praktischen Fällen kann man stets genau genug V_0/V gleich der Umschaltzeit Z setzen und an Stelle von (13) schreiben

$$\Pi = \frac{\alpha \cdot H}{C} \cdot Z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

4. Die Grenzbedingungen. Der Koordinatenursprung sei in die Regeneratormitte, in die Mitte der Periodendauer und in die Mitte zwischen die Eintrittstemperaturen des warmen und kalten Gases gelegt. Der Regenerator erstreckt sich somit von $\xi_0 = -\Lambda/2$ bis $\xi_1 = +\Lambda/2$, die Periodendauer von $\eta_0 = -\Pi/2$ bis $\eta_1 = +\Pi/2$.

Die eine der Grenzbedingungen besteht dann darin, daß das Gas an der Stelle ξ_0 mit der unveränderlichen Temperatur $\vartheta = \Theta_0$ eintritt.

Eine zweite Grenzbedingung folgt aus dem Zusammenhang der betrachteten Periode mit der nächstfolgenden. Bei dieser folgenden Periode tritt das Gas in umgekehrter Strömungsrichtung bei ξ_1 mit der Temperatur $\vartheta = \Theta_1 = -\Theta_0$ in den Regenerator ein. Da die Perioden in bezug auf α, H, c_p, C, V, V_0 usw. vollständig gleichwertig sind, so kann sich bei der gewählten Lage des Koordinatensystems der Temperaturverlauf in beiden Perioden nur dadurch unterscheiden, daß die Vorzeichen der ξ-Werte und der Temperaturen vertauscht und die η-Werte um die Dauer Π einer Periode verschoben sind. Ist also

$$t(\xi, \eta)$$

die Temperatur der Regeneratormasse in der ersten Periode,

$$t'(\xi, \eta)$$

die entsprechende Temperatur in der zweiten Periode, so ergibt sich

$$t'(\xi, \eta + \Pi) = -t(-\xi, \eta) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Für den Beginn der beiden Perioden ($\eta = -\Pi/2$) erhalten wir somit nach (15):

$$t'(\xi, +\Pi/2) = -t(-\xi, -\Pi/2).$$

Nun ist aber die Temperaturverteilung in der Speichermasse am Ende der ersten Periode dieselbe wie bei Beginn der nächsten Periode, d. h. es muß

$$t'(\xi, +\Pi/2) = t(\xi, +\Pi/2)$$

sein. Durch Vergleich mit der vorhergehenden Gleichung erhalten wir daher:

$$t(\xi, \Pi/2) = -t(-\xi, -\Pi/2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Dies ist die gesuchte zweite Grenzbedingung, die wir auf Grund ihrer Herleitung als Umschaltbedingung bezeichnen wollen. Sie sagt aus, daß der Temperaturverlauf der Speichermasse am Ende der Periode zu dem am Anfang der Periode in bezug auf den Koordinatenursprung punktsymmetrisch ist.

5. Die Lösungen der Differentialgleichungen und ihre Anpassung an die Umschaltbedingung. Die linearen partiellen Differentialgleichungen (10) und (11) erster Ordnung sind einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung gleichwertig, die wir folgendermaßen erhalten. Wir differentieren (10) partiell nach η

und (11) partiell nach ξ und finden, wenn wir die erste der so erhaltenen Gleichungen von der zweiten subtrahieren:

$$\frac{\partial^2 (t-\vartheta)}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial (t-\vartheta)}{\partial \xi} + \frac{\partial (t-\vartheta)}{\partial \eta} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Wir versuchen, ob sich ein partikuläres Integral der Gl. (17) finden läßt, welches aus einem Produkt zweier Funktionen besteht, wovon die erste nur von ξ und die zweite nur von η abhängt. Setzen wir also

$$t - \vartheta = f(\xi) \cdot \varphi(\eta)$$

in Gl. (17) ein, so erhalten wir

$$1 + \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,(\ln f)}{\mathrm{d}\,\xi}} + \frac{1}{\frac{\mathrm{d}\,(\ln \varphi)}{\mathrm{d}\,\eta}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Diese Gleichung wird für beliebige Werte von ξ und η nur erfüllt, wenn $\frac{\mathrm{d}\,(\ln \xi)}{\mathrm{d}\,\xi}$ und $\frac{\mathrm{d}\,(\ln \varphi)}{\mathrm{d}\,\eta}$ konstant sind. Wir setzen

$$\frac{\mathrm{d}\,(\ln f)}{\mathrm{d}\,\xi} = -\frac{2}{1+n} \qquad \text{und} \qquad \frac{\mathrm{d}\,(\ln \varphi)}{\mathrm{d}\,\eta} = -\frac{2}{1-n},$$

wodurch der Gl. (18) Genüge geleistet wird, wenn n eine beliebige reelle oder komplexe Konstante bedeutet. Durch Integration folgt, wenn wir die Integrationskonstanten mit A und B bezeichnen,

$$f(\xi) = A \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n}} \qquad \text{und} \qquad \varphi(\eta) = B \cdot e^{-\frac{2\eta}{1-n}};$$

somit, wenn $C = A \cdot B$,

$$t - \vartheta = C \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n} - \frac{2\eta}{1-n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19).$$

Durch Einsetzen von (19) in (10) und (11) und durch Integration ergibt sich

$$\vartheta = -\frac{1+n}{2} \cdot C \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n} - \frac{2\eta}{1-n}} \quad . \quad . \quad (20), \qquad t = +\frac{1-n}{2} \cdot C \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n} - \frac{2\eta}{1-n}} \quad . \quad . \quad (21).$$

Da n beliebige reelle oder komplexe Werte annehmen kann, so gibt es eine unendliche Anzahl partikulärer Lösungen von der Form (20) und (21). Aber keine dieser Lösungen erfüllt für sich allein die Umschaltbedingung (16) und ebenso erfüllt auch keine die erste Grenzbedingung $\vartheta = \text{konst.} = \Theta_0$ an der Stelle $\xi = \xi_0$.

Wir versuchen daher zunächst durch Kombination zweier Partikulärlösungen neue Lösungen zu finden, welche der Umschaltbedingung genügen. Wir setzen also

$$t = C_1 e^{-\frac{2\xi}{1+n_1} - \frac{2\eta}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n_2} - \frac{2\eta}{1-n_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Durch Einsetzen von (22) in die Umschaltbedingung (16) folgt

$$C_1 \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n_1} - \frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n_2} - \frac{\Pi}{1-n_2}} + C_1 \cdot e^{+\frac{2\xi}{1+n_1} + \frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{+\frac{2\xi}{1+n_2} + \frac{\Pi}{1-n_2}} = 0 \quad (23).$$

Wenn die Exponentialfunktionen $e^{-\frac{2\xi}{1+n_1}}$, $e^{+\frac{2\xi}{1+n_1}}$, $e^{-\frac{2\xi}{1+n_2}}$ und $e^{+\frac{2\xi}{1+n_2}}$ alle voneinander verschieden wären, so würde Gl. (23) für veränderliches ξ nur durch $C_1 = C_2 = 0$ erfüllt. Um endliche Werte für C_1 und C_2 zu erhalten, setzen wir

$$e^{+\frac{2\xi}{1+n_1}} = e^{-\frac{2\xi}{1+n_2}} \qquad \text{und} \qquad e^{-\frac{2\xi}{1+n_1}} = e^{+\frac{2\xi}{1+n_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Hieraus folgt

$$n_2 = -(2 + n_1) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Durch Einsetzen von (25) in (23) ergibt sich dann unter Berücksichtigung von (24)

$$\left[C_1 \cdot e^{-\frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{+\frac{\Pi}{3+n_1}}\right] \cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n_1}} + \left[C_1 \cdot e^{+\frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{\Pi}{3+n_1}}\right] \cdot e^{+\frac{2\xi}{1+n_1}} = 0 .$$

Diese Gleichung wird für veränderliches ξ nur erfüllt, wenn die Koeffizienten von $e^{-\frac{2\xi}{1+n_1}}$ und $e^{+\frac{2\xi}{1+n_1}}$ einzeln verschwinden, wenn also

$$C_1 \cdot e^{-\frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{+\frac{\Pi}{3+n_1}} = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \cdot e^{+\frac{\Pi}{1-n_1}} + C_2 \cdot e^{-\frac{\Pi}{3+n_1}} = 0 \quad . \quad (26).$$

Damit diese beiden homogenen linearen Gleichungen für die Unbekanten C_1 und C_2 miteinander verträglich sind, muß die Determinante der Koeffizienten von C_1 und C_2 gleich Null, also

$$e^{-\frac{\Pi}{1-n_1} - \frac{\Pi}{3+n_1}} = e^{+\frac{\Pi}{1-n_1} + \frac{\Pi}{3+n_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

sein. Da für ganze und reelle Werte einer beliebigen Zahl k der Ausdruck $e^{2ik\pi} = 1$ ist, so bleibt Gl. (27) bestehen, wenn man ihre linke Seite hiermit multipliziert. Aus (27) folgt dann

$$\frac{1}{1-n_1} + \frac{1}{3+n_1} = \frac{ik\pi}{\Pi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

Um in den folgenden Gleichungen den Faktor π nicht mitschleppen zu müssen, setzen wir $\Pi/\pi = r$, so daß die Periodendauer $\Pi = r\pi$ wird, und erhalten durch Auflösen von (28)

$$n_1 = -1 \overset{+}{(-)} 2\sqrt{1 + \frac{r}{k} i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29),$$

und hiermit nach (25)

$$n_2 = -1 \overset{-}{(+)} 2\sqrt{1 + \frac{r}{k} i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30).$$

Hierbei wählen wir willkürlich die oberen Vorzeichen. Aus jeder der Gl. (26) ergibt sich mit (28)

$$C_2/C_1 = -(-1)^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31).$$

Setzen wir nun (29), (30) und (31) in die Ausgangsgleichung (22) ein, so erhalten wir folgende, die Umschaltbedingung (16) befriedigende Lösung der Differentialgleichungen:

$$t_k = C_k \left[e^{-\frac{\xi}{\sqrt{1+\frac{r}{k}i}} - \frac{\eta}{1-\sqrt{1+\frac{r}{k}i}}} - (-1)^k \cdot e^{+\frac{\xi}{\sqrt{1+\frac{r}{k}i}} - \frac{\eta}{1+\sqrt{1+\frac{r}{k}i}}} \right] . \quad (32).$$

Da ferner[1])

$$\sqrt{1+\frac{r}{k}i} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}+1\right]} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}-1\right]} = a_k + i\,b_k \quad (33),$$

wobei a_k und b_k als Abkürzungen für die beiden Wurzeln gesetzt sind, so lassen sich die Exponenten in (32) folgendermaßen umformen:

$$\mp \frac{\xi}{\sqrt{1+\frac{r}{k}i}} - \frac{\eta}{1 \mp \sqrt{1+\frac{r}{k}i}} = \mp \frac{\xi(a_k - i\,b_k)}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}} - \frac{k}{r}\eta\,[i(1 \pm a_k) \mp b_k] . \quad (34).$$

Setzen wir weiterhin

$$\frac{a_k}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}} = c_k \qquad \text{und} \qquad \frac{b_k}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{k}\right)^2}} = d_k \quad \ldots\ldots \quad (35),$$

so können wir infolge (34) statt (32) auch schreiben

$$t_k = C_k \left[e^{\frac{\eta}{2a_k} - c_k\xi - i\left(\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k\xi\right)} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{\eta}{2a_k} + c_k\xi - i\left(\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k\xi\right)} \right] \quad (36).$$

Die zugehörige Lösung ϑ_k für die Gastemperatur ergibt sich nach (11) zu

$$\vartheta_k = t_k + \left(\frac{\partial\, t_k}{\partial\, \eta}\right)_\xi$$

und hiermit nach (36) zu

$$\vartheta_k = C_k \left[(P_k - i\,Q_k) \cdot e^{\frac{\eta}{2a_k} - c_k\xi - i\left(\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k\xi\right)} - (-1)^k (R_k - i\,S_k) \cdot e^{-\frac{\eta}{2a_k} + c_k\xi - i\left(\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k\xi\right)} \right] \quad \ldots\ldots \quad (37),$$

wobei die Abkürzungen

$$P_k = 1 + \frac{1}{2a_k}, \qquad Q_k = \frac{1+a_k}{r}k, \qquad R_k = 1 - \frac{1}{2a_k}, \qquad S_k = \frac{1-a_k}{r}k . \quad (38)$$

benutzt sind.

Die Lösungen (36) und (37) sind komplex. Um reelle Lösungen zu erhalten, kombinieren wir mit (36) und (37) zwei entsprechende Lösungen mit dem umgekehrten Vorzeichen von k. Da $\sqrt{1-\frac{r}{k}i} = a_k - i\,b_k$, so erhalten wir aus (32) für negatives k

[1]) Vergl. z. B. Hütte I, 25. Aufl. (1925), S. 46.

$$t_{-k} = C_{-k}\left[e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k\xi + i\left(\frac{1+a_k}{r}k\eta_l - d_k\xi\right)} - (-1)^k \cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k\xi + i\left(\frac{1-a_k}{r}k\eta_l + d_k\xi\right)}\right] \quad (39),$$

$$\vartheta_{-k} = C_{-k}\Big[(P_k + iQ_k)\cdot e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k\xi + i\left(\frac{1+a_k}{r}k\eta_l - d_k\xi\right)} - (-1)^k (R_k + iS_k)\cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k\xi + i\left(\frac{1-a_k}{r}k\eta_l + d_k\xi\right)}\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Wir setzen zunächst[1])

$$C_k = \frac{P_k + iQ_k}{2iQ_k}\cdot d_k \cdot e^{(c_k - id_k)\xi_0}, \qquad C_{-k} = \frac{P_k - iQ_k}{2iQ_k}\cdot d_k \cdot e^{(c_k + id_k)\xi_0}$$

und subtrahieren die Gl. (36) und (37) von (39) und (40). Dann erhalten wir nach einigen hier übergangenen Zwischenrechnungen, die von den aus (33) folgenden Formeln

$$a_k \cdot b_k = \frac{r}{2k}, \qquad a_k^2 + b_k^2 = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{k}\right)^2}, \qquad a_k^2 - b_k^2 = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

sowie von den Beziehungen

$$A\cdot\sin\alpha \pm B\cos\alpha = +\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sin(\alpha \pm \operatorname{arctg} B/A) = \pm\sqrt{A^2+B^2}\cdot\cos(\alpha \mp \operatorname{arctg} A/B)$$

Gebrauch machen, folgende neue Lösungen oder »Eigenfunktionen«, die mit u_k und φ_k bezeichnet seien:

$$u_k = t_{-k} - t_k = \sqrt{\frac{d_k}{Q_k}}\left[e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k(\xi-\xi_0)}\cdot\sin\left\{\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k(\xi-\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{Q_k}{P_k}\right\}\right.$$
$$\left. - (-1)^k\cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k(\xi+\xi_0)}\cdot\sin\left\{\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k(\xi+\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{Q_k}{P_k}\right\}\right] \quad (42),$$

$$\varphi_k = \vartheta_{-k} - \vartheta_k = e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k(\xi-\xi_0)}\cdot\sin\left\{\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k(\xi-\xi_0)\right\}$$
$$-(-1)^k\cdot\frac{b_k}{1+a_k}\cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k(\xi+\xi_0)}\cdot\sin\left\{\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k(\xi+\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{1}{b_k}\right\} \quad (43).$$

Lassen wir hingegen im Nenner der soeben für C_k und C_{-k} gewählten Ausdrücke das i fort, so finden wir durch Addition derselben Gleichungen die weiteren Eigenfunktionen:

$$v_k = t_k + t_{-k} = \sqrt{\frac{d_k}{Q_k}}\left[e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k(\xi-\xi_0)}\cdot\cos\left\{\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k(\xi-\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{Q_k}{P_k}\right\}\right.$$
$$\left. -(-1)^k\cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k(\xi+\xi_0)}\cdot\cos\left\{\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k(\xi+\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{Q_k}{P_k}\right\}\right] \quad (44),$$

$$\psi_k = \vartheta_k + \vartheta_{-k} = e^{\frac{\eta_l}{2a_k} - c_k(\xi-\xi_0)}\cdot\cos\left\{\frac{1+a_k}{r}k\eta - d_k(\xi-\xi_0)\right\}$$
$$-(-1)^k\cdot\frac{b_k}{1+a_k}\cdot e^{-\frac{\eta_l}{2a_k} + c_k(\xi+\xi_0)}\cdot\cos\left\{\frac{1-a_k}{r}k\eta + d_k(\xi+\xi_0) - \operatorname{arctg}\frac{1}{b_k}\right\} \quad (45).$$

Da der Eigenwert k alle ganzen positiven und reellen Werte zwischen 0 und ∞ annehmen kann, so erhält man unendlich viele Eigenfunktionen von der Gestalt (42) bis (45), von denen also u_k und v_k für die Temperatur der Speichermasse, φ_k und ψ_k für die Gastemperatur gelten.

Sonderfall $k = 0$. Wir erhalten zunächst für unendlich kleines k:

$$\sqrt{1 + \frac{r}{k}i} = (1+i)\sqrt{\frac{r}{2k}}, \qquad \sqrt{1 + \left(\frac{r}{k}\right)^2} = \frac{r}{k}.$$

Nach (33), (35) und (38) wird daher

$$a_k = b_k = \sqrt{\frac{r}{2k}}, \quad c_k = d_k = Q_k = \sqrt{\frac{k}{2r}}\,[=0], \quad P_k = 1, \quad \operatorname{arctg}\frac{Q_k}{P_k} = \sqrt{\frac{k}{2r}}, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{b_k} = 2\sqrt{\frac{k}{2r}}.$$

[1]) Bei der Wahl dieser Ausdrücke für C_k und C_{-k} wurde gleichzeitig danach gestrebt, daß die Lösungen für die Gastemperatur an der Stelle $\xi = \xi_0$ eine möglichst einfache Gestalt annehmen, da später der Bedingung $\vartheta = \Theta_0 = \text{konst.}$ bei $\xi = \xi_0$ durch eine Reihenentwicklung nach diesen Lösungen Genüge geleistet werden soll.

Setzen wir diese Ausdrücke in die Gl. (42) bis (45) ein und berücksichtigen wir, daß für unendlich kleine Werte eines beliebigen Arguments x

$$e^x = 1\,, \qquad \sin x = x \text{ und } \cos x = 1$$

wird, so ergibt sich

$$\lim_{k=0} u_k = \sqrt{\frac{2k}{r}}\,(\eta - \xi) \quad . \quad (42\,\mathbf{a}), \qquad \lim_{k=0} \varphi_k = \sqrt{\frac{2k}{r}}\,(\eta - \xi + 1) \quad (43\,\mathbf{a}),$$

$$\lim_{k=0} v_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44\,\mathbf{a}), \qquad \lim_{k=0} \psi_k = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45\,\mathbf{a}).$$

Um für $k = 0$ endliche Eigenfunktionen zu erhalten, multiplizieren wir (42 a) und (43 a) noch mit der willkürlichen Konstanten $\sqrt{\frac{r}{2k}}$. Die Eigenfunktionen für $k = 0$ lauten dann:

$$u_0 = \sqrt{\frac{r}{2k}} \cdot \lim_{k=0} \mu_k = \eta - \xi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46),$$

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{r}{2k}} \cdot \lim_{k=0} \varphi_k = \eta - \xi + 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Nach den Gl. (46) und (47) sind u_0 und φ_0 linear in ξ und η. Da sich η bei unendlich kurzer Periodendauer nur unendlich wenig ändert, so erscheinen in diesem Falle u_0 und φ_0 zeitlich konstant. Bei unendlich kurzer Periodendauer erfüllt somit Gl. (47) auch die Grenzbedingung $\vartheta = \Theta_0 = \text{konst.}$ für $\xi = \xi_0$, wenn φ_0 mit einer entsprechend gewählten Konstanten α_0 multipliziert wird. Auch bei unendlich langem Regenerator mit beliebiger endlicher Umschaltdauer wird diese Grenzbedingung durch den Ansatz $\vartheta = \alpha_0 \cdot \varphi_0$ erfüllt, da in diesem Fall bei einem endlichen Wert von Θ_0 der Koeffizient α_0 unendlich klein werden muß und somit nach Gl. (47) eine endliche Aenderung von η ohne Einfluß ist. Wir erhalten also in den genannten beiden Fällen längs des Regenerators einen linearen Temperaturverlauf, der in jeder Periode nur unendlich wenig verschoben wird. Bei gleichzeitig endlicher Umschaltdauer und endlicher Regeneratorlänge muß man hingegen die Eigenfunktionen für $k > 0$ hinzunehmen, um die nach Gl. (47) bei $\xi = \xi_0$ veränderliche Gastemperatur so zu korrigieren, daß ϑ an dieser Stelle konstant wird.

6. Die Eigenfunktionen für $k > 0$. Die Eigenschaften der Eigenfunktionen u_k, φ_k, v_k und ψ_k für $k > 0$ erkennen wir am besten, wenn wir zunächst die Grenzwerte bestimmen, denen die Koeffizienten a_k, b_k, c_k usw. und damit die Eigenfunktionen selbst mit wachsendem k zustreben.

Aus der Definitionsgleichung (33) für a_k und b_k folgt

$$\lim_{k=\infty} a_k = \lim_{k=\infty} c_k = 1\,, \qquad \lim_{k=\infty} (1 - a_k) = -\frac{1}{8}\left(\frac{r}{k}\right)^2, \qquad \lim_{k=\infty} b_k = \lim_{k=\infty} d_k = \frac{r}{2k}\,.$$

Nach Gl. (38) finden wir ferner

$$\lim_{k=\infty} P_k = 1{,}5\,, \qquad \lim_{k=\infty} Q_k = \frac{2k}{r}\,.$$

Die Annäherung an diese Grenzwerte erfolgt um so rascher, je kleiner r ist. So ist z. B. bei $r = 1$:

$$a_1 = 1{,}0987\,, \qquad a_5 = 1{,}0049 \quad [\text{statt } \lim_{k=\infty} a_k = 1]\,;$$

hingegen bei $r = 5$:

$$a_1 = 1{,}7460\,, \qquad a_5 = 1{,}0987\,.$$

Da hiernach die Annäherung an die gefundenen Grenzwerte auch bei kleinen Werten von k schon ziemlich gut ist, so erhalten wir ein grundsätzlich richtiges Bild der Eigenfunktionen, wenn wir diese Grenzwerte in die Gleichungen (42) bis (45) einsetzen. Wir finden auf diese Weise für große Werte von k:

$$u_k = \frac{r}{2k}\Big[e^{\frac{\eta}{2} - (\xi - \xi_0)} \cdot \sin\left\{\frac{2k}{r}\,\eta - \frac{r}{2k}\,(\xi - \xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\}$$

$$- (-1)^k \cdot e^{-\frac{\eta}{2} + (\xi + \xi_0)} \cdot \sin\left\{-\frac{r}{8k}\,\eta + \frac{r}{2k}\,(\xi + \xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\}\Big] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48),$$

$$q_k = e^{\frac{\eta}{2}-(\xi-\xi_0)} \cdot \sin\left\{\frac{2k}{r}\eta - \frac{r}{2k}(\xi-\xi_0)\right\}$$

$$-(-1)^k \cdot \frac{r}{4k} \cdot e^{-\frac{\eta}{2}+(\xi+\xi_0)} \cdot \sin\left\{-\frac{r}{8k}\cdot\eta + \frac{r}{2k}(\xi+\xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49),$$

$$v_k = \frac{r}{2k}\left[e^{\frac{\eta}{2}-(\xi-\xi_0)} \cdot \cos\left\{\frac{2k}{r}\eta - \frac{r}{2k}(\xi-\xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\}\right.$$

$$\left.-(-1)^k \cdot e^{-\frac{\eta}{2}+(\xi+\xi_0)} \cdot \cos\left\{-\frac{r}{8k}\cdot\eta + \frac{r}{2k}(\xi+\xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50),$$

$$\psi_k = e^{\frac{\eta}{2}-(\xi-\xi_0)} \cdot \cos\left\{\frac{2k}{r}\eta - \frac{r}{2k}(\xi-\xi_0)\right\}$$

$$-(-1)^k \cdot \frac{r}{4k} \cdot e^{-\frac{\eta}{2}+(\xi+\xi_0)} \cdot \cos\left\{-\frac{r}{8k}\eta + \frac{r}{2k}(\xi+\xi_0) - \frac{\pi}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51).$$

Für $\xi = \xi_0$ erhalten die ersten Glieder dieser Gleichungen die Gestalt

$$\text{konst.} \cdot e^{\frac{\eta}{2}} \cdot \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{\frac{2k}{r}\eta\right\}.$$

Da sich während einer Regeneratorperiode das Argument $\frac{2k}{r}\eta$ um $k \cdot 2\pi$ ändert, so stellen die ersten Glieder Schwingungen mit k Schwingungsperioden während einer Regeneratorperiode dar. Die Schwingungsamplituden nehmen hierbei mit wachsendem η proportional $e^{\eta/2}$ zu.

Bei den zweiten Gliedern sind die sin- und cos-Werte bei großen Werten von k von η praktisch unabhängig. Das zweite Glied stellt somit bei konstantem ξ im wesentlichen eine mit $e^{-\eta/2}$ aperiodisch abnehmende Temperatur dar.

Bemerkenswert ist die Abhängigkeit der beiden Glieder von ξ. Das erste Glied ist nur von $\xi - \xi_0$ abhängig, d. h. von der Entfernung vom linken Regeneratorende. Die erwähnten Schwingungen erfahren mit wachsendem $\xi - \xi_0$ eine leichte, mit zunehmendem k immer kleiner werdende Phasenverschiebung. Außerdem nehmen ihre Amplituden mit größer werdendem $\xi - \xi_0$ sehr rasch ab, so daß sie z. B. bei $\xi - \xi_0 = 6{,}9$ nur noch 1 ‰ des Anfangswertes betragen.

Das zweite aperiodische Glied hängt hingegen nur von der Entfernung $\xi + \xi_0$ vom rechten Regeneratorende ab. Hier hat es seinen Höchstwert und wird mit wachsendem Abstand vom rechten Ende nach demselben Gesetz kleiner wie das erste Glied vom linken Ende aus. Bei sehr langen Regeneratoren haben also die Eigenfunktionen für $k > 0$ nur in der Nähe der Enden merkliche Beträge, während sie in der Mitte in einem längeren Bereich praktisch gleich Null sind. Nur bei verhältnismäßig kurzen Regeneratoren überlagern sich die beiden Glieder.

Die Schwingungsglieder der Eigenfunktionen u_k und v_k zeigen ferner eine Phasenverschiebung um $\pi/2$ gegen die Schwingungsglieder von q_k und ψ_k, d. h. die Temperaturschwingungen der Regeneratormasse hinken den Schwingungen des Gases um 90° nach. Bei den aperiodischen Gliedern tritt hingegen keine Phasenverschiebung auf. Außerdem sind die Schwingungsglieder von q_k und ψ_k für alle Werte von k von der gleichen Größenordnung. Die aperiodischen Glieder von q_k und ψ_k sowie sämtliche Glieder der Funktionen u_k und v_k nehmen hingegen umgekehrt proportional k ab.

Die Abweichungen der Konstanten a_k, b_k usw. von den bisher benutzten Grenzwerten machen sich bei kleinen Werten von k hauptsächlich dadurch geltend, daß die beiden Glieder der Eigenfunktionen in Richtung nach dem Regeneratorinnern etwas langsamer abklingen, daß die zeitliche Zunahme der Schwingungsamplituden und zeitliche Abnahme der aperiodischen Glieder abgeschwächt und daß auch die Phasenverschiebung zwischen den Temperaturschwingungen des Gases und der Regeneratormasse kleiner als $\pi/2$ wird. Außerdem ist die auf eine Regeneratorperiode treffende Schwingungszahl etwas größer als k und nicht mehr eine ganze Zahl.

In den Abbildungen 2 bis 5 sind die Eigenfunktionen für $r = 1$ mit den Eigenwerten $k = 1$ bis $k = 4$, in Abb. 6 bis 8 die Eigenfunktionen für $r = 5$ mit $k = 1$ und 2 graphisch dargestellt. Links sind die Schwingungsglieder für konstante Werte von $\xi - \xi_0$, rechts die aperiodischen Glieder für konstante Werte von $\xi + \xi_0$ als Funktion von η auf-

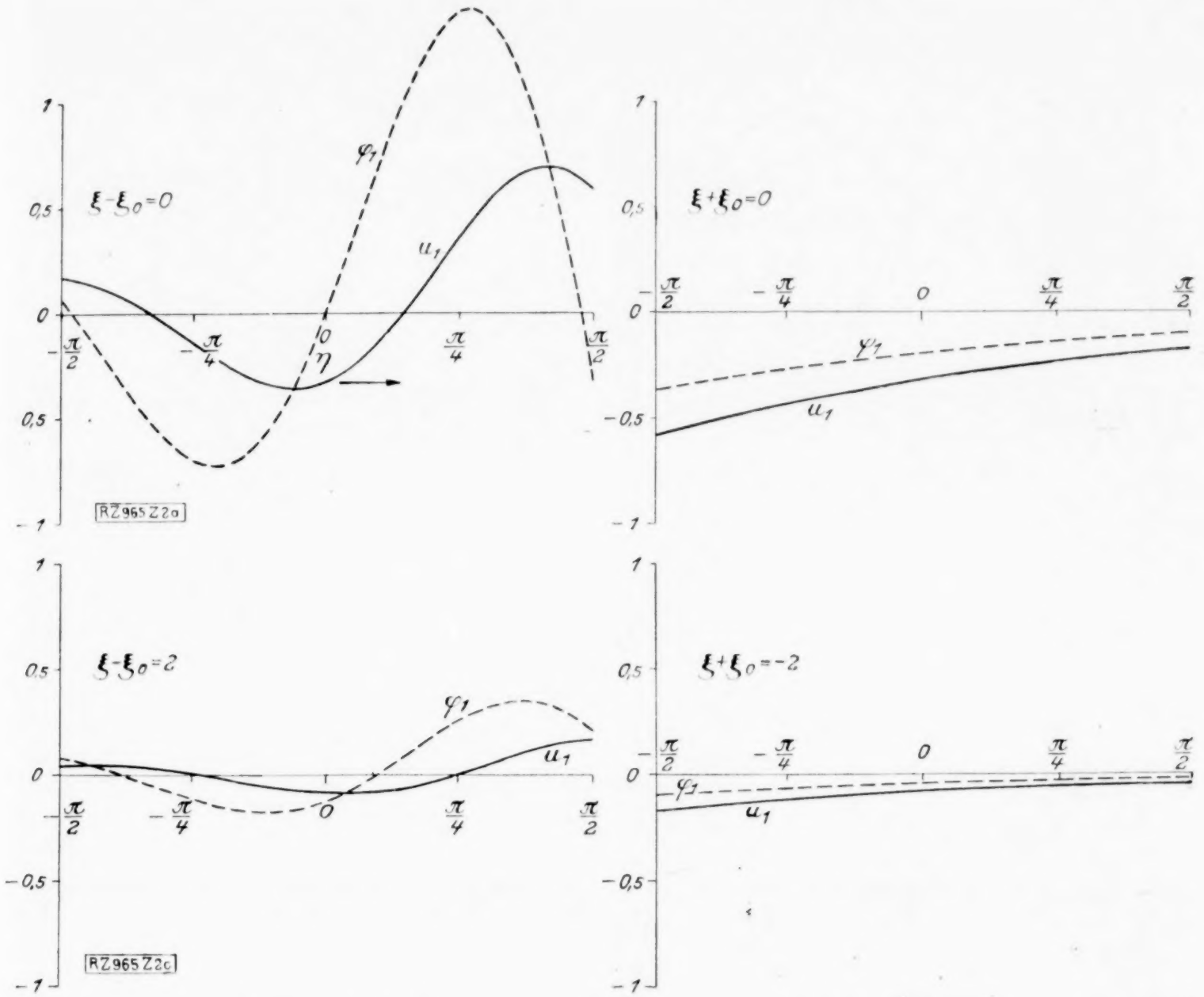


Abb. 2a. Die Eigenfunktionen u_1 und φ_1 für $r = 1$.

getragen. Die gestrichelten Linien gelten für die Gastemperatur, die ausgezogenen für die Temperatur der Speichermasse. Die Kurven stellen somit den zeitlichen Temperaturverlauf an einer bestimmten Stelle $\xi - \xi_0$ oder $\xi + \xi_0$ während einer Periode dar.

Um die Eigenfunktionen physikalisch zu deuten, wollen wir uns vorstellen, daß der Regenerator, der wieder sehr lang sei, seiner ganzen Länge nach im Mittel die Temperatur Null hat. Die Eigenfunktionen bedeuten dann Schwingungen um diese Nullage. Während der betrachteten Periode pendelt die Eintrittstemperatur des von links bei $\xi - \xi_0 = 0$ eintretenden Gases mit wachsenden Ausschlägen um die Gleichgewichtslage. Durch die Wärmeübertragung an die Speichermasse wird deren Temperatur zum Mitschwingen angeregt und bewirkt, daß die Temperaturschwingungen des Gases bei dessen Fortschreiten in das Regeneratorinnere immer mehr gedämpft werden. Nach dem vollständigen Abklingen dieser Schwingungen durchströmt das Gas das mittlere Regeneratorstück mit der konstanten Temperatur Null. Bei Annäherung an das rechte Regeneratorende tritt ein neuer Ausschlag aus der Gleichgewichtslage ein, der aber im weiteren Verlauf der Periode aperiodisch abklingt. Dieser nochmalige Ausschlag, der durch das zweite Glied der Eigenfunktionen ausgedrückt wird, rührt daher, daß am rechten Regeneratorende die Temperatur der Speichermasse durch die Schwingungen, die hier das von rechts eintretende Gas in der vorhergehenden Periode ausgeführt hat, gestört worden ist, und daß nun das in der neuen Periode von links kommende Gas diese gestörte Temperatur vorfindet, sie teilweise selbst annimmt und sie auszugleichen sucht. Die zweiten Glieder sollen daher im nachfolgenden als »Ausgleichsglieder« bezeichnet werden.

7. Die Anpassung an die Anfangsbedingung $\vartheta = \Theta_0$ an der Stelle $\xi = \xi_0$ durch Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen. Da die Differentialgleichungen

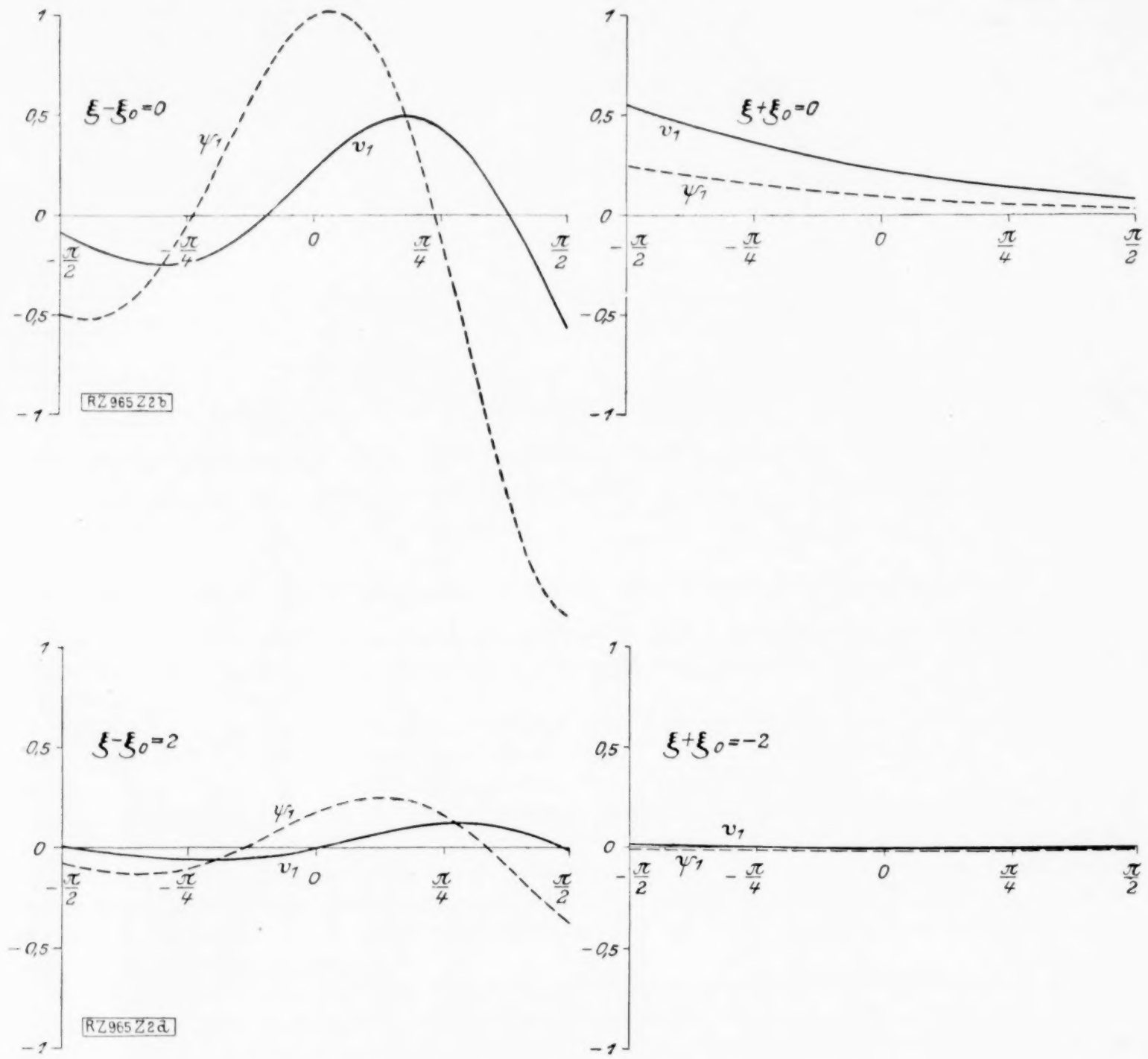


Abb. 2 b. Die Eigenfunktionen v_1 und ψ_1 für $r = 1$.

(10) und (11) linear sind, so können wir unter Benutzung zunächst beliebiger Konstanten α_k und β_k die Gastemperatur ϑ und die Temperatur t der Speichermasse folgendermaßen als Reihen nach den Eigenfunktionen entwickeln:

$$\vartheta = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \alpha_3 \varphi_3 + \ldots \alpha_k \varphi_k + \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \beta_3 \psi_3 + \ldots \beta_k \psi_k + \ldots \quad (52),$$

$$t = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots \alpha_k u_k + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + \ldots \beta_k v_k + \ldots \quad (53).$$

Diese Reihen erfüllen die Umschaltbedingung, weil ihr jedes einzelne Glied genügt. Sie stellen somit die gesuchte Lösung des Regeneratorproblems dar, wenn es gelingt, die Koeffizienten α_0, α_1, $\alpha_2 \ldots$, β_1, $\beta_2 \ldots$ usw. so zu bestimmen, daß die Reihe (52) an der Stelle $\xi = \xi_0$ den Wert $\vartheta = \Theta_0$ ergibt.

Das bei den harmonischen Funktionen, insbesondere bei der Fourierschen Reihe übliche Verfahren der Koeffizientenbestimmung [1]) läßt sich im vorliegenden Falle nicht ohne weiteres anwenden, weil die Eigenfunktionen φ_k und ψ_k im Bereich $-r\,\pi/2 < \eta < +r\,\pi/2$ nicht orthogonal sind, d. h. die sog. inneren Produkte

---

[1]) Vergl. z. B. R. Courant und D. Hilpert, Methoden der mathematischen Physik, I. Bd., Springer, Berlin 1924, S. 32 ff.

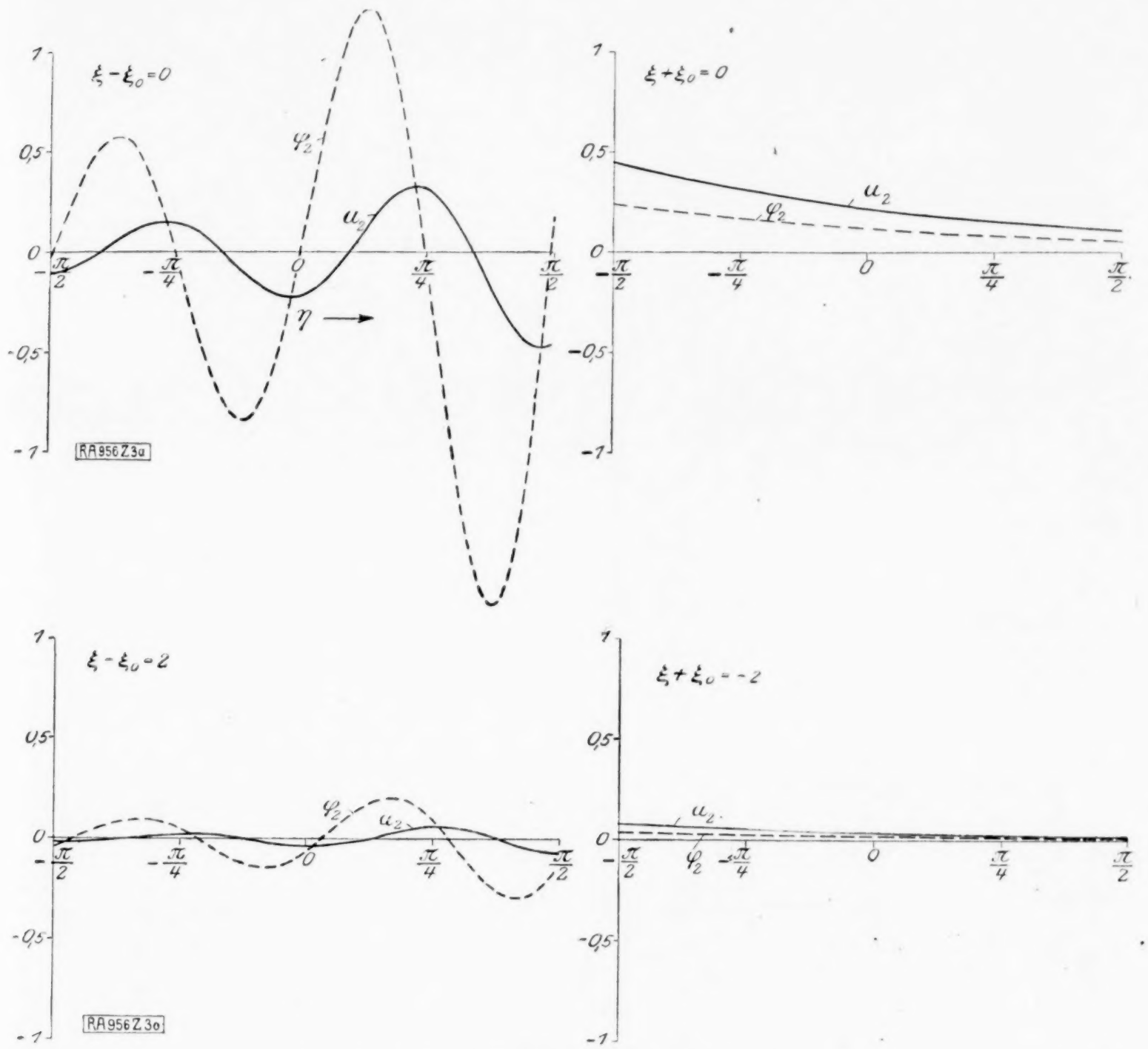


Abb. 3a. Die Eigenfunktionen u_2 und φ_2 für $r = 1$.

$$\int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+r\frac{\pi}{2}} \mathfrak{q}_i\,\mathfrak{q}_k\,d\eta, \qquad \int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+r\frac{\pi}{2}} \mathfrak{q}_i\,\psi_k\,d\eta, \qquad \int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+r\frac{\pi}{2}} \psi_i\,\psi_k\,d\eta \quad \text{für } i \neq k$$

nicht verschwinden. Es ist zwar ein Verfahren bekannt, nach dem jedes beliebige Funktionensystem in ein System orthogonaler Funktionen übergeführt werden kann [1]), doch ist dieses in seiner Anwendung so umständlich, daß wir folgenden Weg vorziehen, der nur eine teilweise Orthogonalität ergibt. Wir wollen voraussetzen, daß ξ_0 dem Absolutwert nach so groß ist, daß bei $\xi = \xi_0$ das Ausgleichsglied vernachlässigt werden kann. Dann nehmen die Eigenfunktionen für sehr große Werte von k nach Gl. (49) und (51) folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{q}_k = e^{\frac{\eta}{2}} \sin\left(\frac{2k}{r}\eta\right), \qquad \psi_k = e^{\frac{\eta}{2}} \cos\left(\frac{2k}{r}\eta\right).$$

Da die Funktionen $\sin\left(\frac{2k}{r}\eta\right)$ und $\cos\left(\frac{2k}{r}\eta\right)$ im Intervall von $-r\frac{\pi}{2}$ bis $+r\frac{\pi}{2}$ orthogonal sind, so folgt, daß sich die Funktionen $\Phi_k = e^{-\eta/2}\,\mathfrak{q}_k$ und $\Psi_k = e^{-\eta/2}\,\psi_k$ mit wachsendem k immer mehr einem orthogonalen Grenzzustand nähern, wir können sie daher als asymptotisch orthogonal bezeichnen.

[1]) Vergl. z. B. Courant-Hilpert, a. a. O. S. 34.

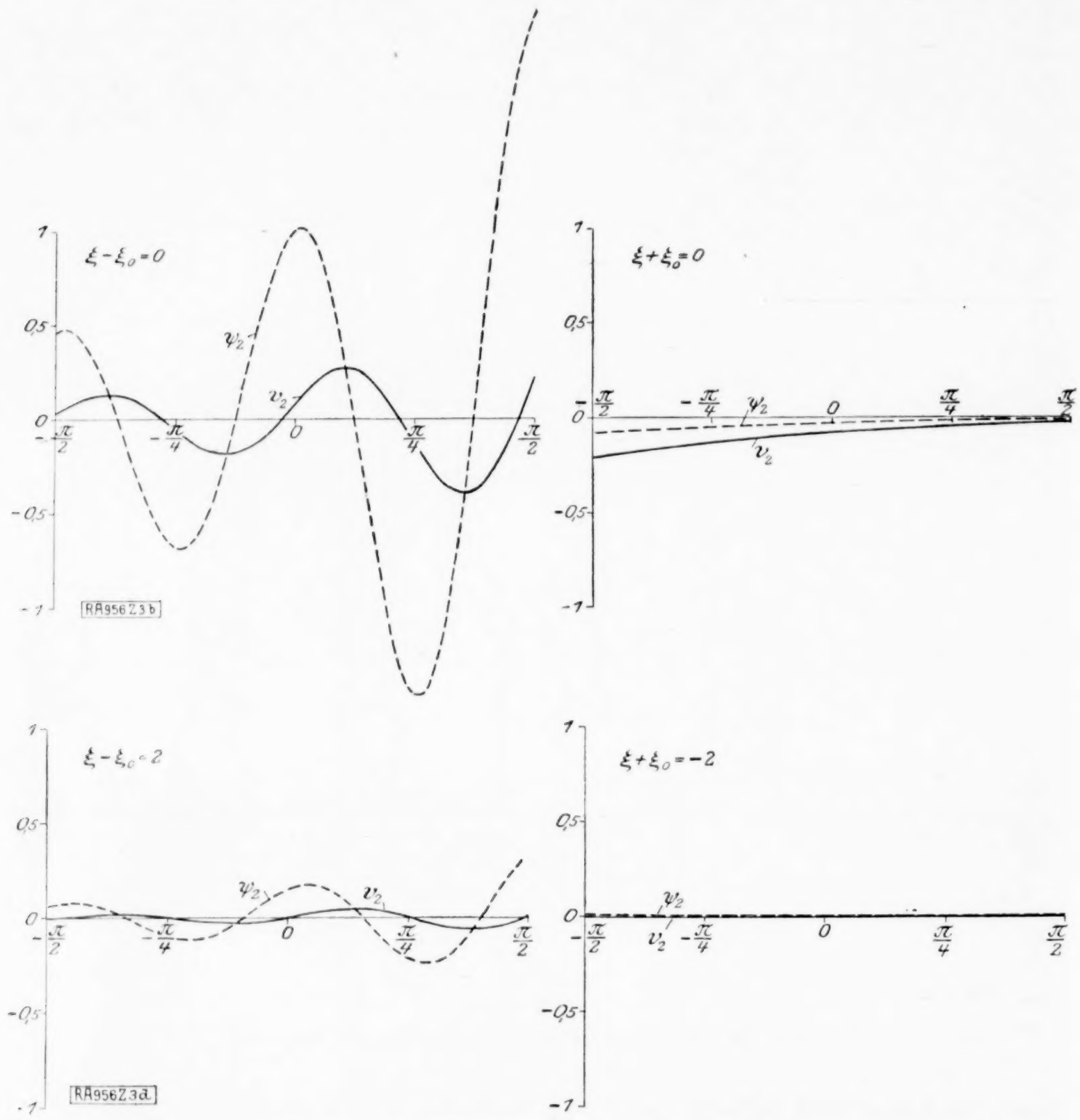


Abb. 3b. Die Eigenfunktionen v_2 und ψ_2 für $r = 1$.

Dividieren wir nun die Gl. (52) durch $e^{\eta/2}$, so erhalten wir die Reihe

$$e^{-\eta/2} \cdot \vartheta = \alpha_0 \Phi_0 + \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2 + \alpha_3 \Phi_3 + \ldots \alpha_k \Phi_k + \ldots + \beta_1 \Psi_1 + \beta_2 \Psi_2 + \beta_3 \Psi_3 + \ldots \beta_k \Psi_k + \ldots$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung gleich S, so sollen nun die Koeffizienten α_k und β_k so bestimmt werden, daß $e^{-\eta/2}\,\Theta_0$ durch S im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate möglichst gut wiedergegeben wird. Ist also $\varepsilon = e^{-\eta/2} \cdot \Theta_0 - S$, so soll

$M = \int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+r\frac{\pi}{2}} \varepsilon^2 \, d\eta$ ein Minimum werden. Da somit $\frac{\partial M}{\partial \alpha_k} = 0$ und $\frac{\partial M}{\partial \beta_k} = 0$ sein muß, so folgt

$$\alpha_0 \int \Phi_0 \Phi_k d\eta + \alpha_1 \int \Phi_1 \Phi_k d\eta + \ldots \; \alpha_k \int \Phi_k^2 d\eta + \ldots \quad \alpha_i \int \Phi_i \Phi_k d\eta + \ldots$$
$$+ \beta_1 \int \Psi_1 \Phi_k d\eta + \ldots \; \beta_k \int \Psi_k \Phi_k d\eta + \ldots \; \beta_i \int \Psi_i \Phi_k d\eta + \ldots = \int e^{-\eta/2}\,\Theta_0 \Phi_k d\eta \quad (54)$$

und

$$\alpha_0 \int \Phi_0 \Psi_k d\eta + \alpha_1 \int \Phi_1 \Psi_k d\eta + \ldots \; \alpha_k \int \Phi_k \Psi_k d\eta + \ldots \; \alpha_i \int \Phi_i \Psi_k d\eta + \ldots$$
$$+ \beta_1 \int \Psi_1 \Psi_k d\eta + \ldots \; \beta_k \int \Psi_k^2 d\eta + \ldots \quad \beta_i \int \Psi_i \Psi_k d\eta + \ldots = \int e^{-\eta/2}\,\Theta_0 \Psi_k d\eta \quad (55).$$

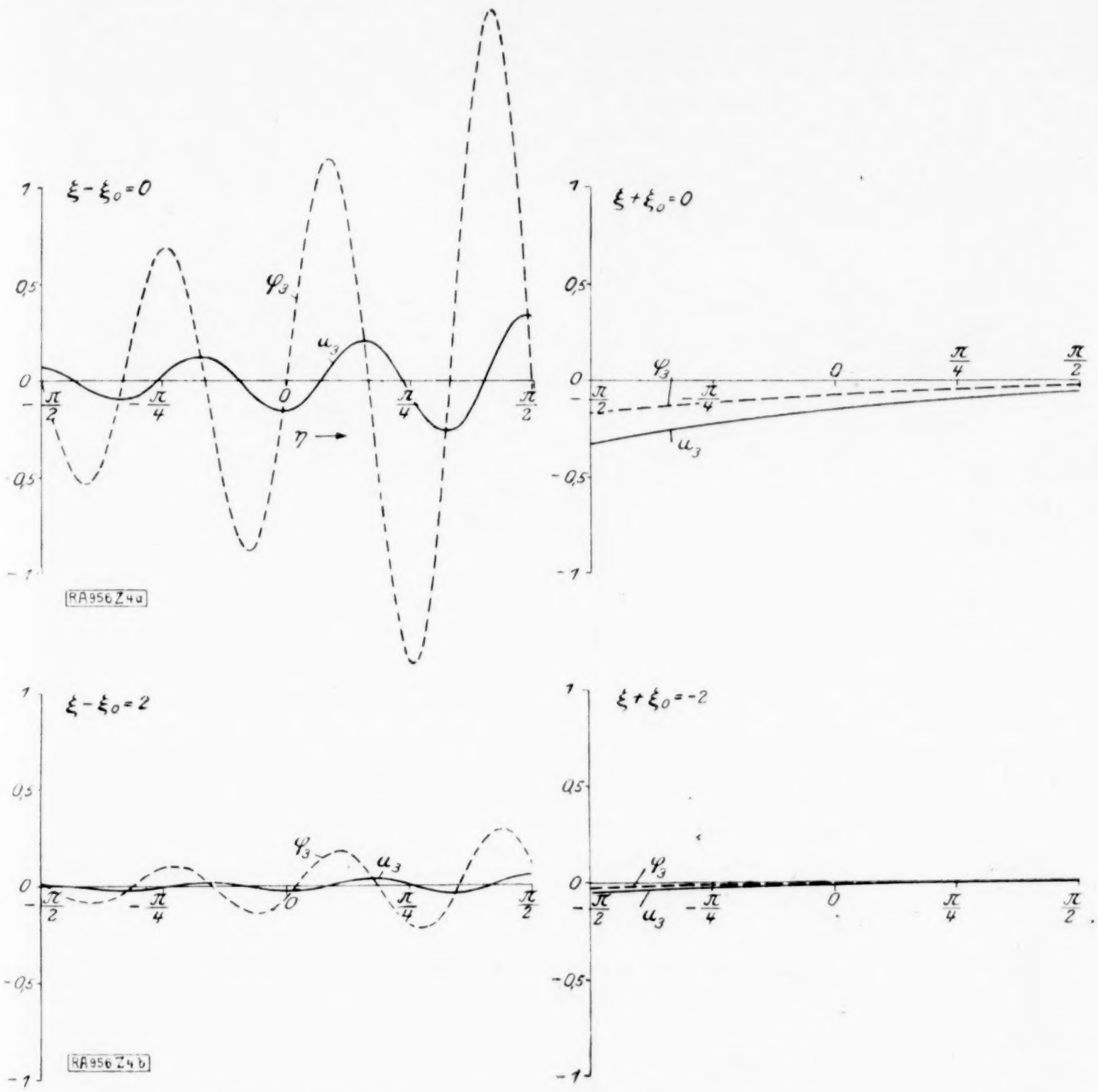


Abb. 4. Die Eigenfunktionen u_3 und φ_3 für $r = 1$.

Infolge der asymptotischen Orthogonalität werden die inneren Produkte $\int \Phi_i \Phi_k \, d\eta$, $\int \Psi_i \Phi_k \, d\eta$ und $\int \Psi_i \Psi_k \, d\eta$ (abgesehen von $\int \Phi_k^2 \, d\eta$ und $\int \Psi_k^2 \, d\eta$) mit wachsendem i und k immer kleiner, so daß man sie von einer bestimmten endlichen Stelle an vernachlässigen kann. Wir wollen unter der Voraussetzung $i \neq 0$ und $k \neq 0$ annehmen, daß alle inneren Produkte aus nicht gleichen Eigenfunktionen verschwinden, wenn i oder k größer als K ist. Für $k = 1, 2, 3$ bis $k = K$ brechen dann die Gleichungen (54) und (55) nach α_K und β_K ab; wir erhalten hierdurch $2K$ Gleichungen mit $2K + 1$ Unbekannten. Für $k = 0$ behält hingegen Gl. (54) zunächst die Form einer unendlichen Reihe [während Gl. (55) für $k = 0$ nicht existiert]. Für $k > K$ folgt aus Gl. (54) und (55), wenn n eine positive ganze Zahl zwischen 1 und ∞ bedeutet,

$$\alpha_{K+n} = \frac{\int e^{-\eta/2} \Theta_0 \Psi_{K+n} \, d\eta - a_0 \int \Phi_0 \Phi_{K+n} \, d\eta}{\int \Phi_{K+n}^2 \, d\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56),$$

$$\beta_{K+n} = \frac{\int e^{-\eta/2} \Theta_0 \Psi_{K+n} \, d\eta - a_0 \int \Phi_0 \Psi_{K+n} \, d\eta}{\int \Psi_{K+n}^2 \, d\eta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (57).$$

Setzen wir (56) und (57) in die Gl. (54) für $k = 0$ ein, so treten auch in dieser nur noch die $2K + 1$ Unbekannten α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_K$, $\beta_1 \ldots \beta_K$ auf. Sind die so erhaltenen $2K + 1$ linearen Gleichungen in bekannter Weise aufgelöst, so findet man die höheren

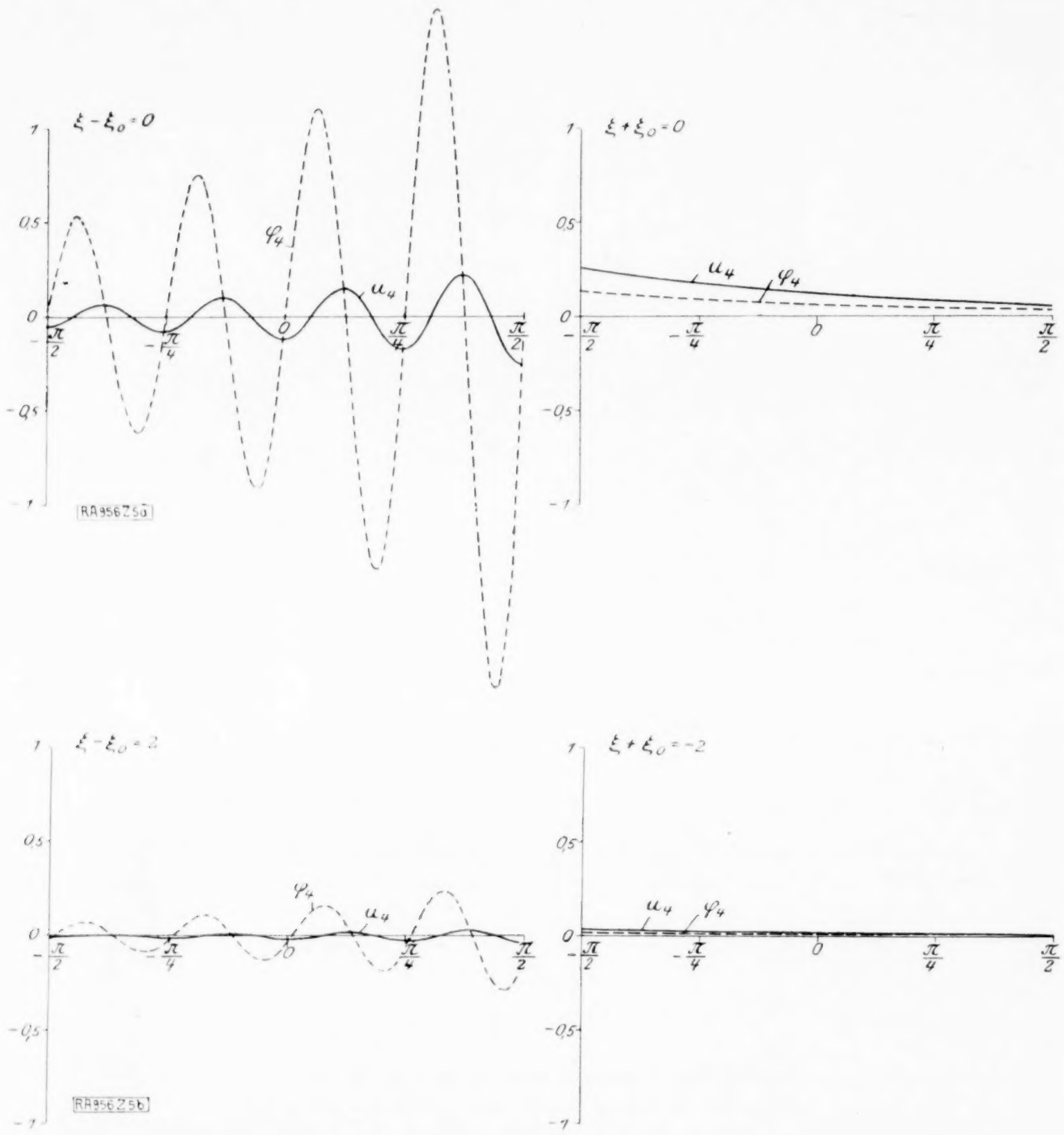


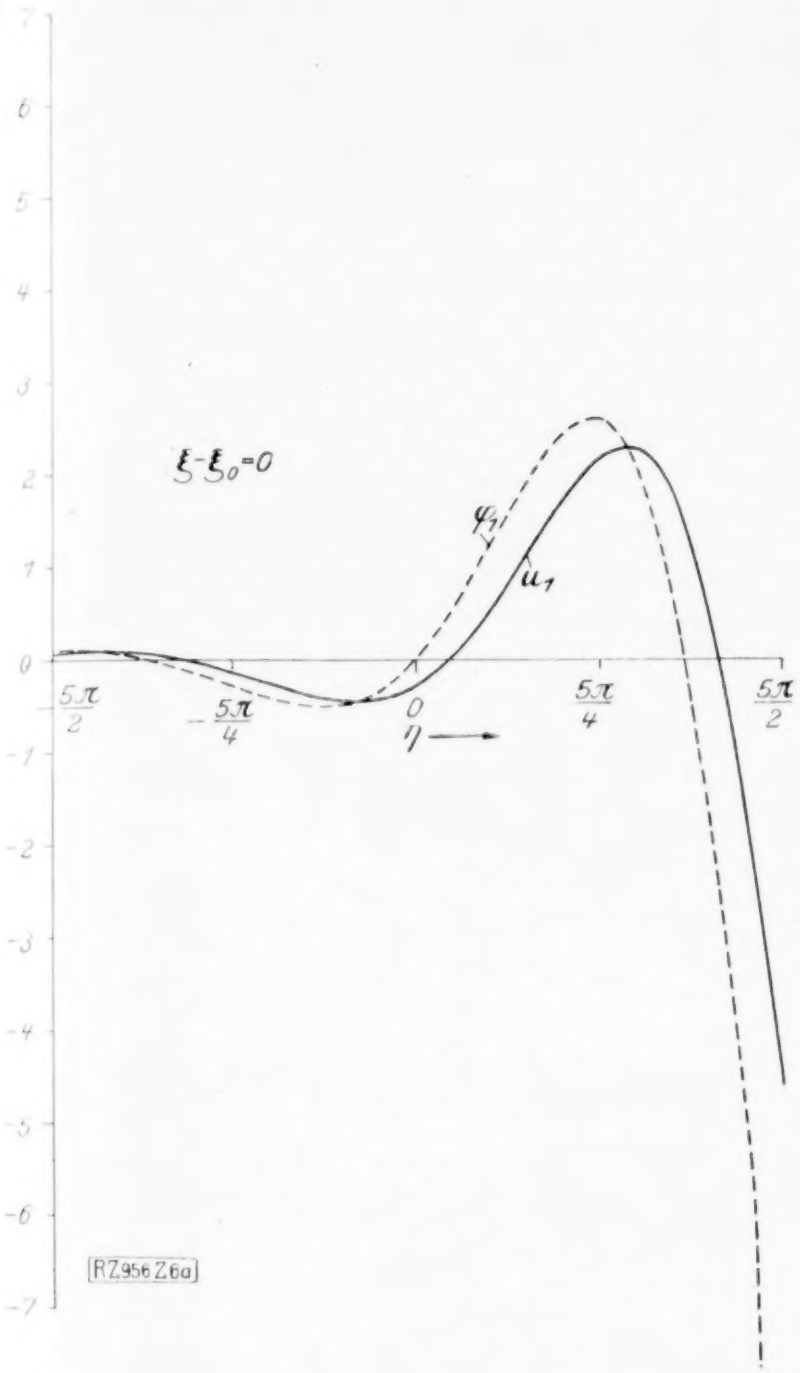
Abb. 5. Die Eigenfunktionen u_4 und φ_4 für $r = 1$.

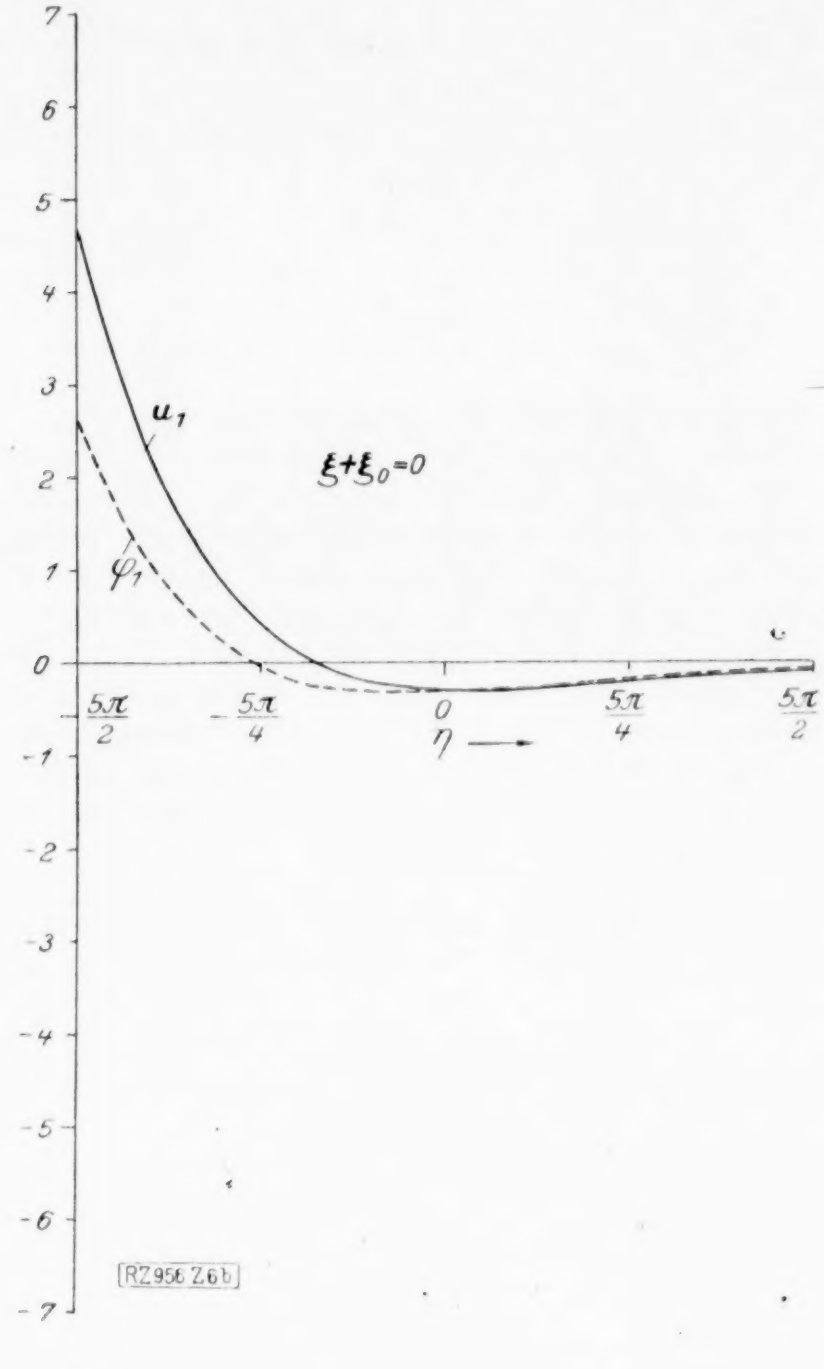
Koeffizienten durch Einsetzen von α_0 in (56) und (57). Praktisch kann man die Zahl der linearen Gleichungen noch weiter herabmindern, da ein Teil der inneren Produkte schon früher vernachlässigt werden kann.

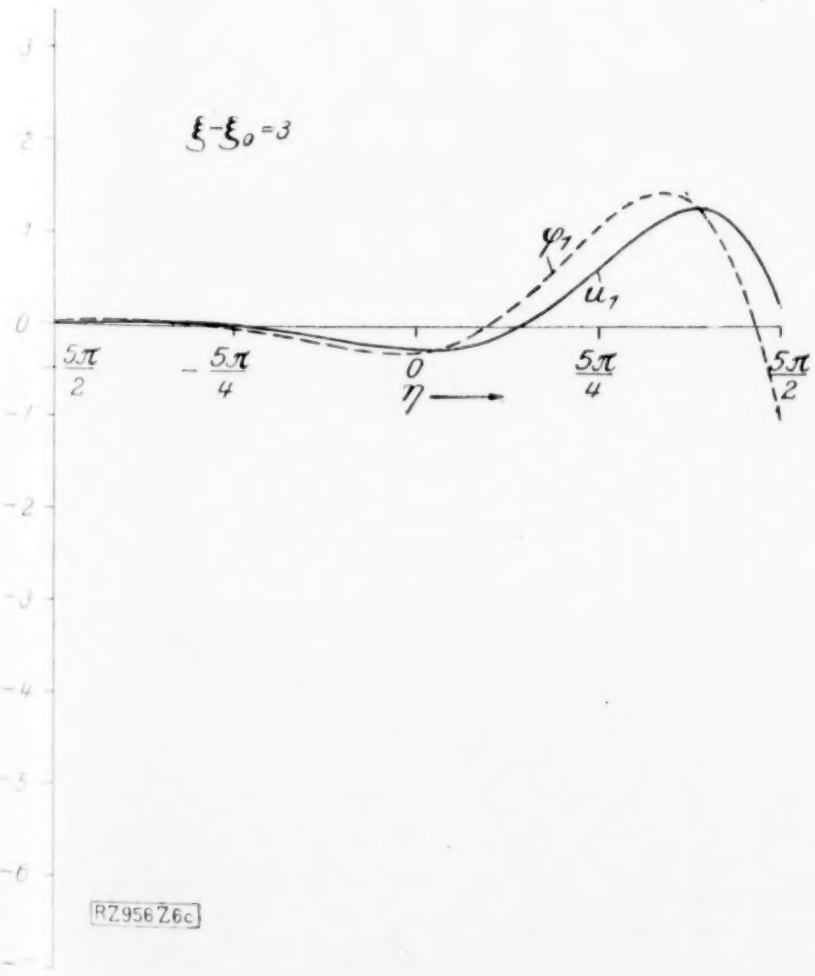
Auf dem beschriebenen Wege wurden z. B. für $\xi_0 = -5$, $\Theta_0 = -50^0$ und $r = 1$ folgende Werte ermittelt:

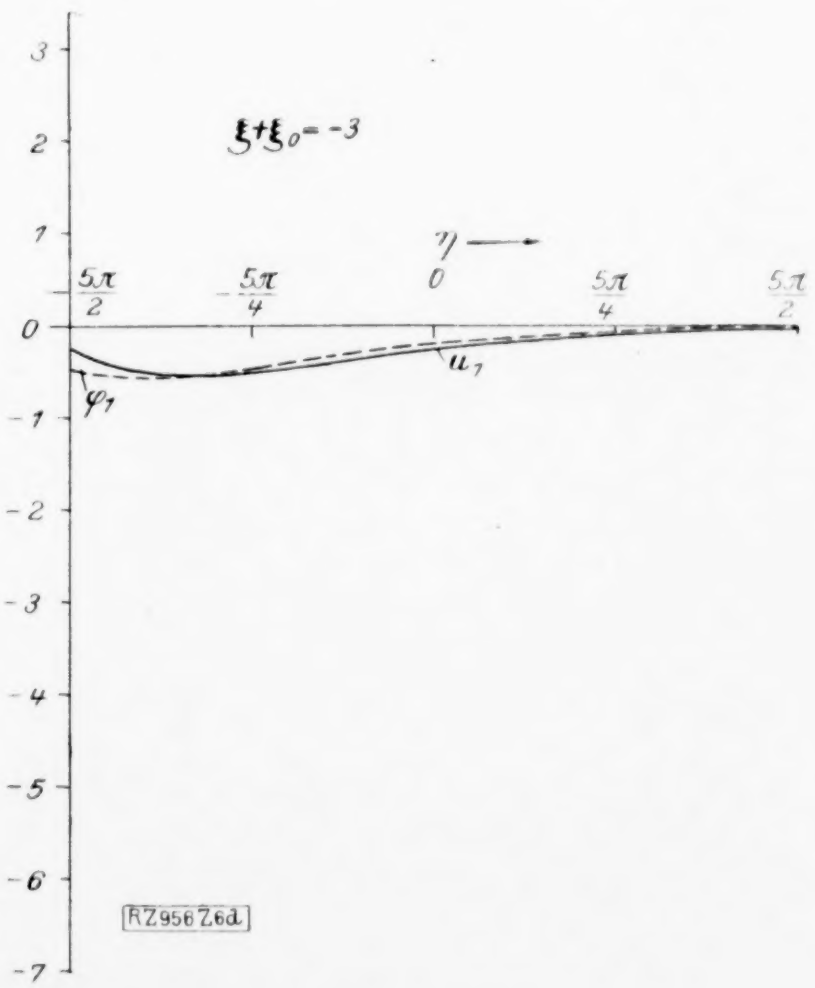
$$\alpha_0 = -9{,}52; \quad \alpha_1 = +8{,}52; \quad \alpha_2 = -5{,}29; \quad \alpha_3 = +3{,}74; \quad \alpha_4 = -2{,}62;$$
$$\beta_1 = +4{,}57; \quad \beta_2 = -1{,}58; \quad \beta_3 = +0{,}74; \quad \beta_4 = -0{,}39.$$

Wenn die Koeffizienten bei einem gegebenen r für einen einzigen Wert von ξ_0 berechnet sind, so lassen sich hieraus die zum gleichen r gehörigen Koeffizienten für einen anderen Wert von ξ_0, der mit ξ_0' bezeichnet sei, durch eine einfache Umrechnung ermitteln. Nach Gl. (52) gelten, da außer η_0 alle η_k und ψ_k von dem Wert von ξ_0 unabhängig sind, für $\vartheta = \Theta_0$ und $\vartheta' = \Theta_0'$ die Reihenentwicklungen:









Schwingungsglieder. Ausgleichsglieder.

Abb. 6. Die Eigenfunktionen u_1 und φ_1 für $r = 5$.

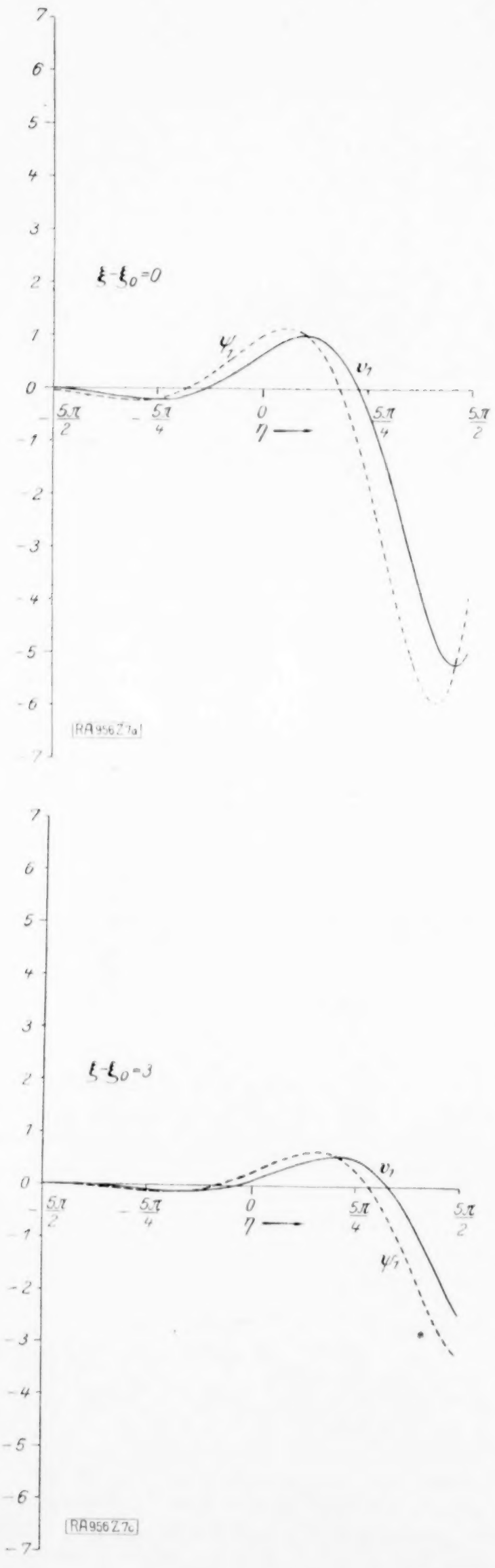


Abb. 7. Die Eigenfunktionen v_1 und ψ_1 für $r = 5$.

für ξ_0: $$\Theta_0 = \alpha_0\, \varphi_0 + \sum_1^\infty \{\alpha_k\, \varphi_k + \beta_k\, \psi_k\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58),$$

für ξ_0': $$\Theta_0' = \alpha_0'\, \varphi_0' + \sum_1^\infty \{\alpha_k'\, \varphi_k + \beta_k'\, \psi_k\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59).$$

Da ferner nach (47)

$$\varphi_0' = \xi_0 - \xi_0' + \varphi_0\,,$$

so können wir statt (59) auch schreiben

$$\Theta_0' + \alpha_0'\,(\xi_0' - \xi_0) = \alpha_0'\, \varphi_0 + \sum_1^\infty \{\alpha_k'\, \varphi_k + \beta_k'\, \psi_k\} \quad . \quad . \quad . \quad (59\,\mathbf{a}).$$

Da $\Theta_0' + \alpha_0'\,(\xi_0' - \xi_0)$ konstant ist, so müssen also in dem auf der rechten Seite von (59a) stehenden Ausdruck die Koeffizienten α_0', α_k', β_k' so bestimmt werden, daß dieser Ausdruck einen von η unabhängigen Wert ergibt. Diese Aufgabe ist aber durch die Reihenentwicklung (58) schon gelöst, nur mit dem Unterschied, daß die hier dargestellte Konstante Θ_0 einen anderen Wert als die gesuchte hat. Die Gl. (59a) wird also erfüllt, wenn wir unter Einführung einer noch zu bestimmenden Konstanten C

$$\alpha_0' = C \cdot \alpha_0\,, \qquad \alpha_k' = C \cdot \alpha_k\,, \qquad \beta_k' = C \cdot \beta_k$$

setzen. Aus Gl. (59a) und (58) erhalten wir dann

$$C = \frac{\Theta_0'}{\Theta_0 - \alpha_0\,(\xi_0' - \xi_0)}$$

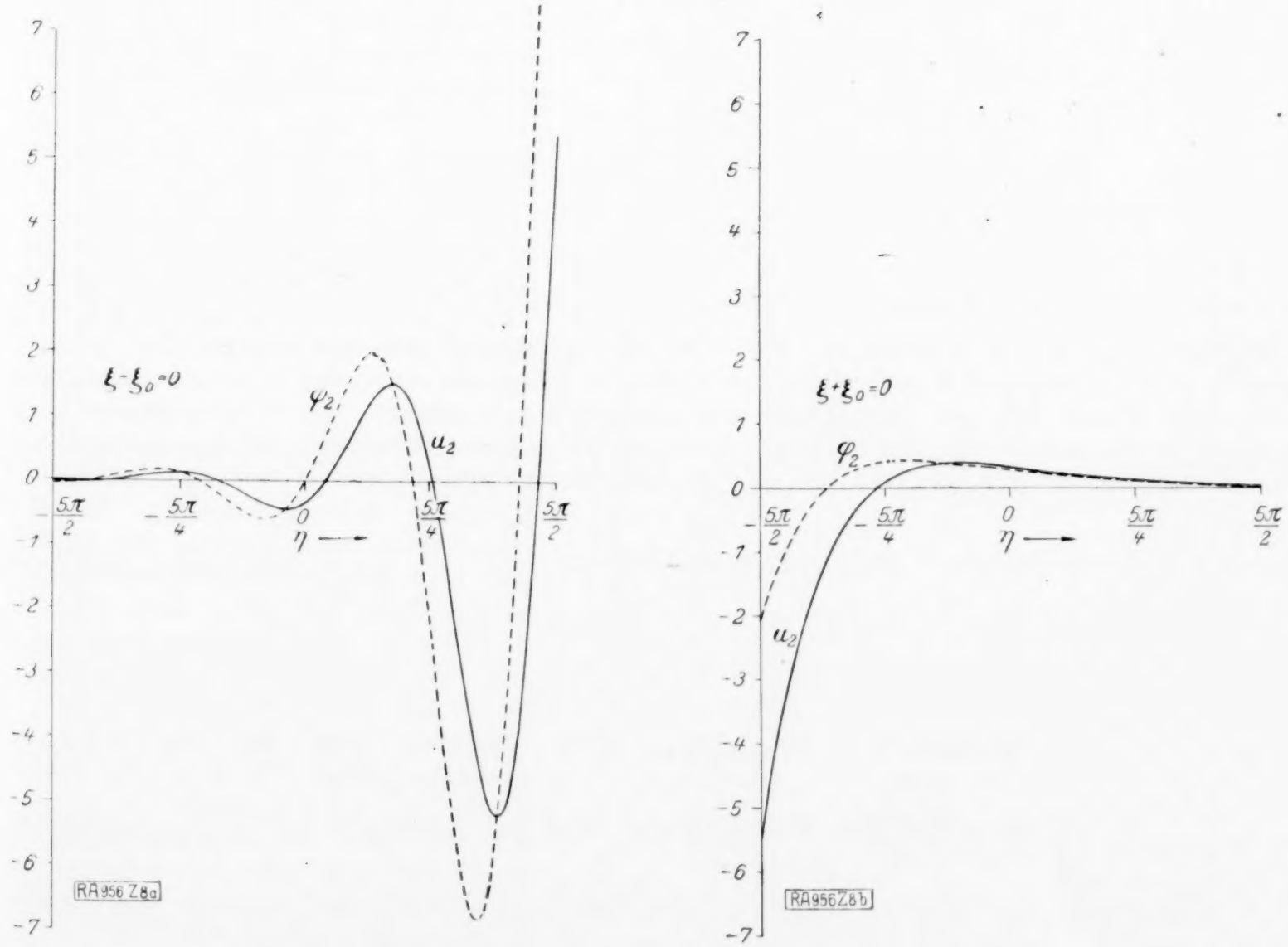


Abb. 8. Die Eigenfunktionen u_2 und φ_2 für $r = 5$.

und hiermit: $$\alpha_k' = \frac{\Theta_0'}{\Theta_0 - a_0(\xi_0' - \xi_0)} \cdot \alpha_k \quad \text{und} \quad \beta_k' = \frac{\Theta_0'}{\Theta_0 - a_0(\xi_0' - \xi_0)} \cdot \beta_k \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

für alle Werte von k zwischen 0 und ∞.

Wenn sich hingegen r ändert, so müssen alle Koeffizienten neu berechnet werden.

8. Ergebnis der zahlenmäßigen Berechnungen. Der Berechnung wurde der Fall $II = \pi\,(r = 1)$, $\Lambda = 10\,(\xi_0 = -5)$ und $\Theta_0 = -50^0$ zugrundegelegt. Nach dem Aehnlichkeitsprinzip entsprechen dieser Annahme eine sehr große Zahl praktisch möglicher Fälle, für die nach (12) und (13)

$$\frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot L = 10 \quad . \quad . \quad (61\,a) \quad \text{und} \quad \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot V_0 = \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61\,b)$$

sein muß. Einige solcher Fälle seien genannt, bei denen wir wie früher voraussetzen, daß ein zweiter Regenerator gleicher Bauart gleichzeitig mitbetrieben wird.

1. Ein eiserner 4000 kg schwerer Regenerator von 5 m Länge und 320 m² Gesamtheizfläche wird stündlich von 1000 cbm Gas (gemessen bei 15° C und 735,5 mm Hg) mit der spezifischen Wärme $c_p = 0{,}286\ \frac{\text{kcal}}{\text{cbm}\ ^0\text{C}}$ durchströmt. Die Umschaltzeit beträgt eine halbe Stunde, die Wärmeübergangszahl $\alpha = 9$.

2. Ein Regenerator gleicher Bauart wie unter 1, aber von nur 1,5 m Länge, der also nur ein Gewicht von 1200 kg und eine Gesamtheizfläche von 96 m² hat, wird ebenfalls stündlich von 1000 cbm Gas durchströmt. Durch Erhöhung der Gasgeschwindigkeit sei die Wärmeübergangszahl auf 30 gesteigert worden; die Umschaltzeit beträgt dann nur noch 9 min.

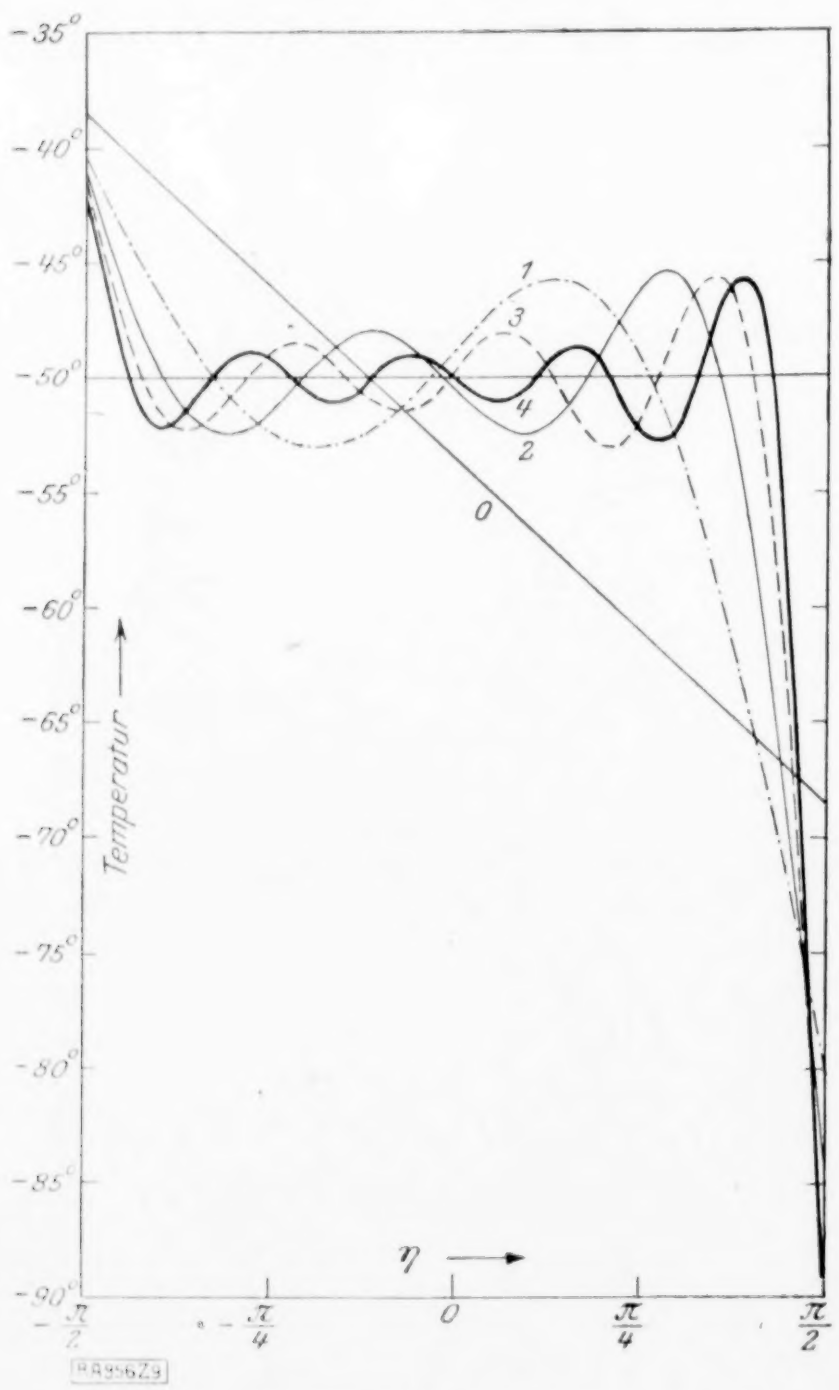


Abb. 9. Oszillierende Annäherung an die konstante Eintrittstemperatur $\Theta_0 = -50^0$.

3. Ein steinerner Regenerator von 1 qm Gesamtquerschnitt, 15 m Länge, 6000 kg Gewicht und 1430 m² Gesamtheizfläche wird stündlich von 6000 cbm Gas durchströmt. Beträgt die spezifische Wärme der verwendeten Steinart 2 kcal/kg °C, so entspricht den Aehnlichkeitsgesetzen nach (61a) und (61b) eine Wärmeübergangszahl von $\alpha = 12$ und eine Umschaltzeit von 2,2 Stunden.

Auch die Annahme $\Theta_0 = -50^0$ bezieht sich nicht nur auf den Fall, daß das eine Gas von links mit der Temperatur -50^0, das andere von rechts mit der Temperatur $+50^0$ C eintritt, da der Temperaturmaßstab nachträglich noch mit einem beliebigen Faktor multipliziert und der Nullpunkt des Koordinatensystems in Richtung der Temperatur beliebig verschoben werden kann. So ergeben sich z B. die Eintrittstemperaturen der beiden Gase zu 20° C und 1200° C, wenn man den Temperaturmaßstab mit 11,8 multipliziert und den Nullpunkt bei 610° C annimmt.

Abb. 9 zeigt die schrittweise Zusammensetzung der Eigenfunktionen φ_k und ψ_k an der Stelle $\xi = \xi_0$. Als Abszisse ist η, das während einer Periode das Intervall $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ durchläuft, als Ordinate die Temperatur aufgetragen. Die mit 0 gekennzeichnete gerade Linie entspricht

dem Ausdruck $\alpha_0 \varphi_0$, die Kurve 1 dem Ausdruck $\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \beta_1 \psi_1$ usw., bei der Kurve 4 sind alle Eigenfunktionen von $k = 0$ bis $k = 4$ berücksichtigt.

Das Endergebnis der Berechnung für verschiedene Werte von ξ ist aus Abb. 10 ersichtlich. Rechts ist der zeitliche Verlauf der Gastemperatur, links der Temperaturverlauf der Speichermasse dargestellt. In Abb. 11 sind für $\xi = -5, -3, -2$ und 0 die Kurven für die nächstfolgende Periode, für welche jeweils der obere η-Maßstab in umgekehrter Richtung gilt, mit eingezeichnet. Die Temperatur der Speichermasse durchläuft also eine geschlossene Kurve. Die Kurven für die entsprechenden positiven ξ-Werte erhält man, wenn man in den ersten drei dargestellten Fällen die Vorzeichen der Temperatur- und der η-Maßstäbe umkehrt.

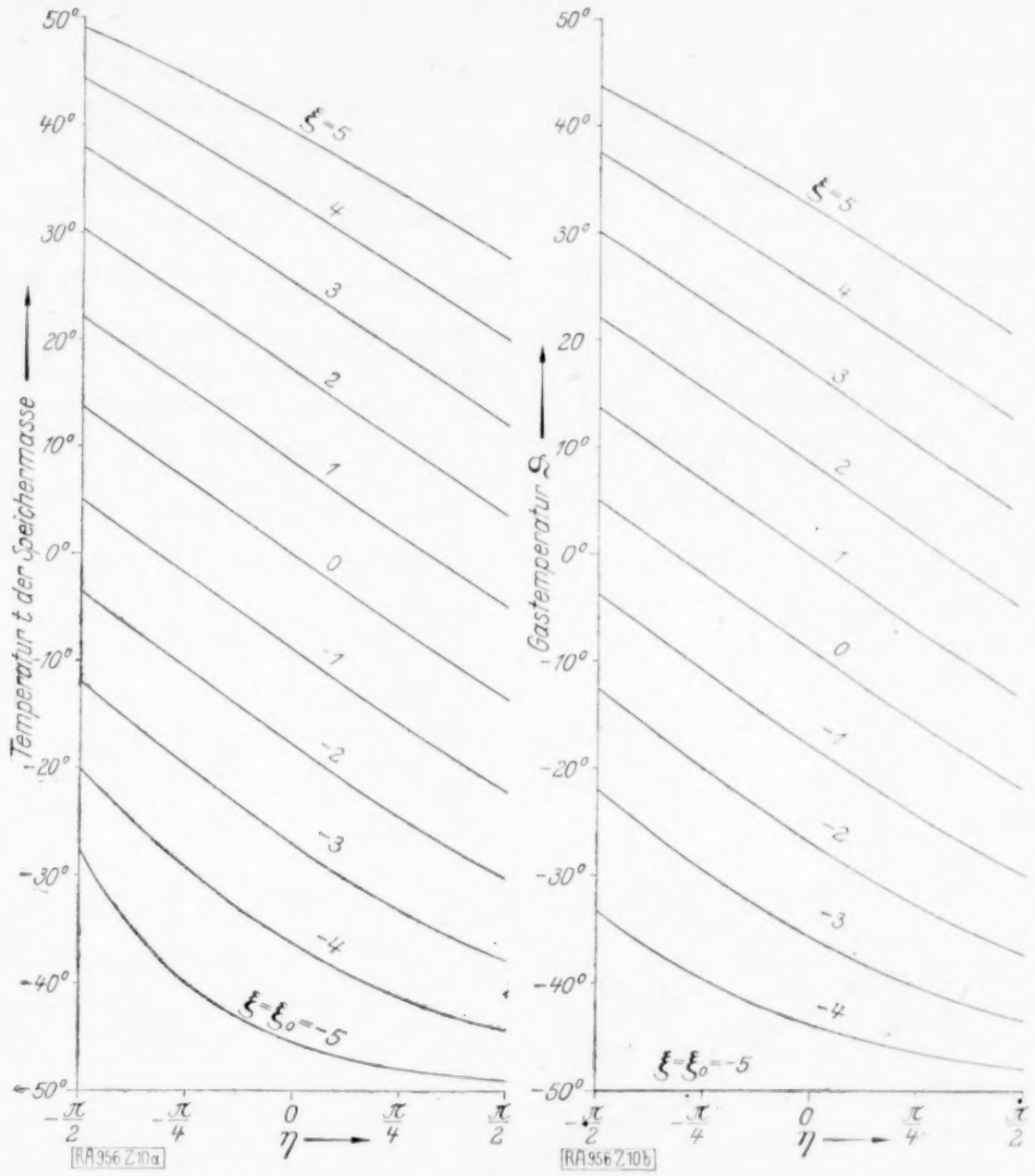


Abb. 10. Zeitlicher Temperaturverlauf im Regenerator bei $\Pi = \pi$ und $\Lambda = 10$.

Abb. 12 zeigt den Temperaturverlauf längs des Regenerators für $\eta = -\pi/2, -\pi/4, 0, +\pi/4$ und $+\pi/2$, und zwar gilt die obere Figur für die Temperatur des von links eintretenden Gases, die untere für die Temperatur der Speichermasse.

9. Berechnung des Wirkungsgrades. Als Wirkungsgrad sei das Verhältnis der im Regenerator ausgetauschten Wärmemenge zu derjenigen Wärmemenge verstanden, welche erforderlich ist, um das von links mit der Temperatur Θ_0 eintretende Gas vollständig bis auf die Eintrittstemperatur Θ_1 des von rechts eintretenden Gases zu erwärmen.

Da das Gas während der betrachteten Periode an der Stelle $\xi_1 = +\Lambda/2$ mit der mittleren Temperatur $\vartheta_m = \frac{1}{r\pi} \int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+\frac{r\pi}{2}} \vartheta \, d\eta$ austritt, wenn sich auch ϑ auf die Stelle ξ_1 bezieht, so ist die in dieser Periode von der Gasmenge V_0 aufgenommene Wärmemenge

$$Q = V_0 \cdot c_p \cdot (\vartheta_m - \Theta_0) .$$

Bei vollkommenem Wärmeaustausch würde hingegen die Wärmemenge

$$Q_{id} = V_0 \cdot c_p \, (\Theta_1 - \Theta_0) = - V_0 \cdot c_p \cdot 2 \, \Theta_0$$

übertragen. Der Wirkungsgrad des Regenerators ergibt sich daher zu

$$\eta_{\text{Reg.}} = \frac{Q}{Q_{id}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\vartheta_m}{\Theta_0} \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62).$$

Nach Gl. (52) erhalten wir für ϑ_m

$$\vartheta_m = \alpha_0 \, (\varphi_0)_m + \alpha_1 \, (\varphi_1)_m + \alpha_2 \, (\varphi_2)_m + \ldots \alpha_k \, (\varphi_k)_m + \ldots$$
$$+ \beta_1 \, (\psi_1)_m + \beta_2 \, (\psi_2)_m + \ldots \beta_k \, (\psi_k)_m + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63),$$

wenn $(\varphi_0)_m$, $(\varphi_1)_m$, $(\varphi_2)_m$ usw. die Mittelwerte $\frac{1}{r\pi}\int_{-r\frac{\pi}{2}}^{+\frac{r\pi}{2}} \varphi_0\, d\eta$ usw. der Eigenfunktionen an der Stelle ξ_1 bedeuten. Für diese Mittelwerte finden wird durch Integration über die Gleichungen (47), (43) und (45) und unter Berücksichtigung von (41) folgende Ausdrücke:

$$(\varphi_0)_m = 1 - \xi_1 = 1 - \Lambda/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64),$$

$$(\varphi_k)_m = (-1)^k \cdot \frac{2}{r\pi}\Big[\{(1-a_k) - [(1-a_k)\cos(d_k\Lambda) - b_k \sin(d_k\Lambda)]\cdot e^{-c_k\Lambda}\}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right)\cdot \sin\left(\frac{1-a_k}{2}k\pi\right)$$
$$- \{b_k + [(1-a_k)\sin(d_k\Lambda) - b_k\cos(d_k\Lambda)]\cdot e^{-c_k\Lambda}\}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right)\cdot\cos\left(\frac{1-a_k}{2}k\pi\right)\Big] \quad (65),$$

$$(\psi_k)_m = -(-1)^k \cdot \frac{2}{r\pi}\Big[\{(1-a_k) + [(1-a_k)\cos(d_k\Lambda) - b_k \sin(d_k\Lambda)]\cdot e^{-c_k\Lambda}\}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right)\cdot \cos\left(\frac{1-a_k}{2}k\pi\right)$$
$$+ \{b_k - [(1-a_k)\sin(d_k\Lambda) - b_k\cos(d_k\Lambda)]\cdot e^{-c_k\Lambda}\}\,\mathfrak{Cof}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right)\cdot\sin\left(\frac{1-a_k}{2}k\pi\right)\Big] \quad (66).$$

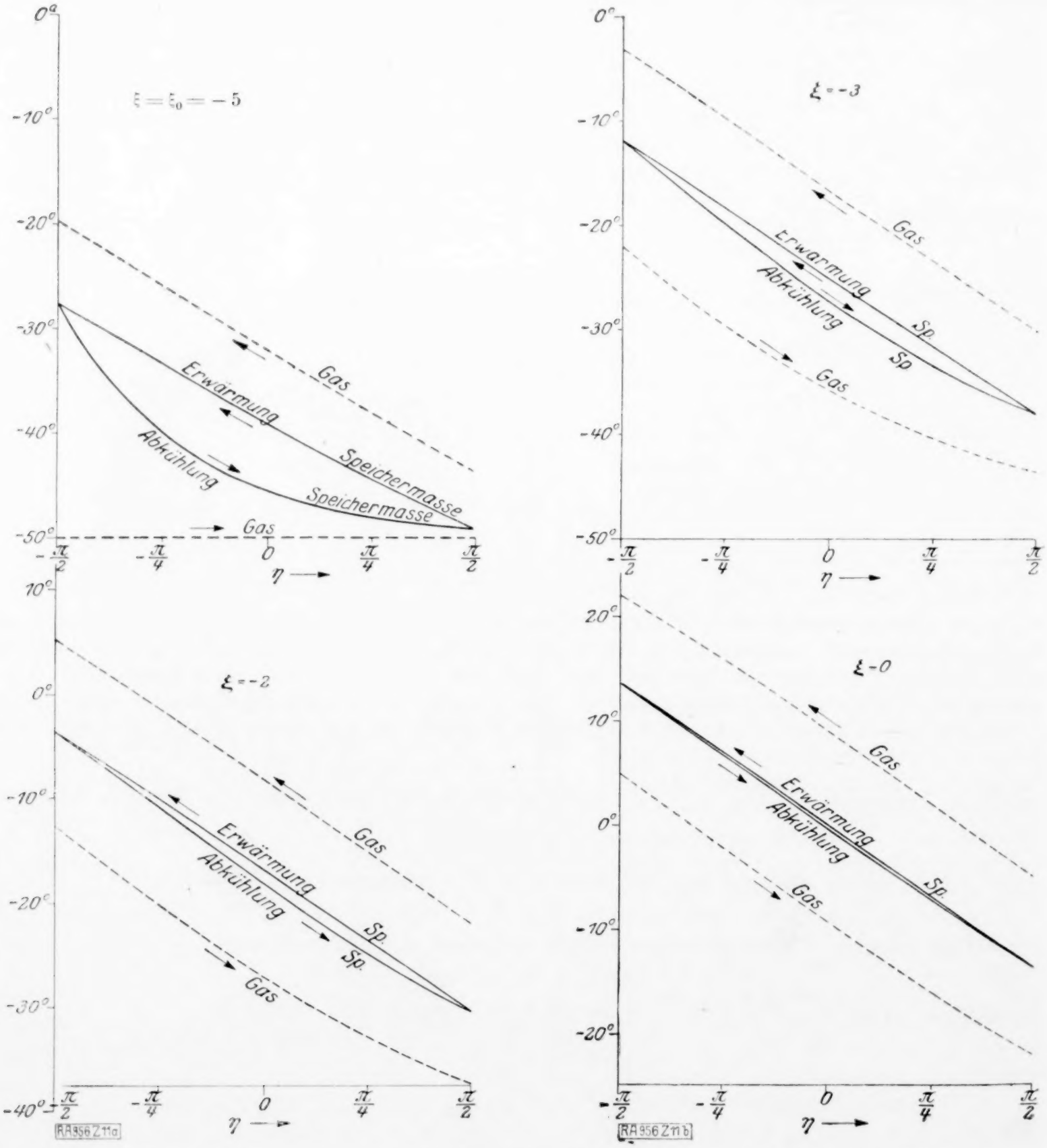


Abb. 11. Temperaturverlauf an verschiedenen Stellen des Regenerators bei $H = \pi$ und $\Lambda = 10$.

Beschränken wir uns wieder auf sehr lange Regeneratoren, für die praktisch $e^{-c_k \Lambda} = 0$ wird, so erhalten wir durch Einsetzen von (64), (65) und (66) in Gl. (63)

$$\vartheta_m = \alpha_0 \left(1 - \frac{\Lambda}{2}\right) + \frac{2}{r\pi} \sum_1^\infty (-1)^k \Big[\{\alpha_k (1-a_k) - \beta_k \cdot b_k\} \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right) \cdot \sin\left(\frac{1-a_k}{2} k\pi\right) - \{\beta_k (1-a_k) + \alpha_k \cdot b_k\} \cdot \mathfrak{Sin}\left(\frac{r\pi}{4\,a_k}\right) \cdot \cos\left(\frac{1-a_k}{2} k\pi\right)\Big] \quad (67).$$

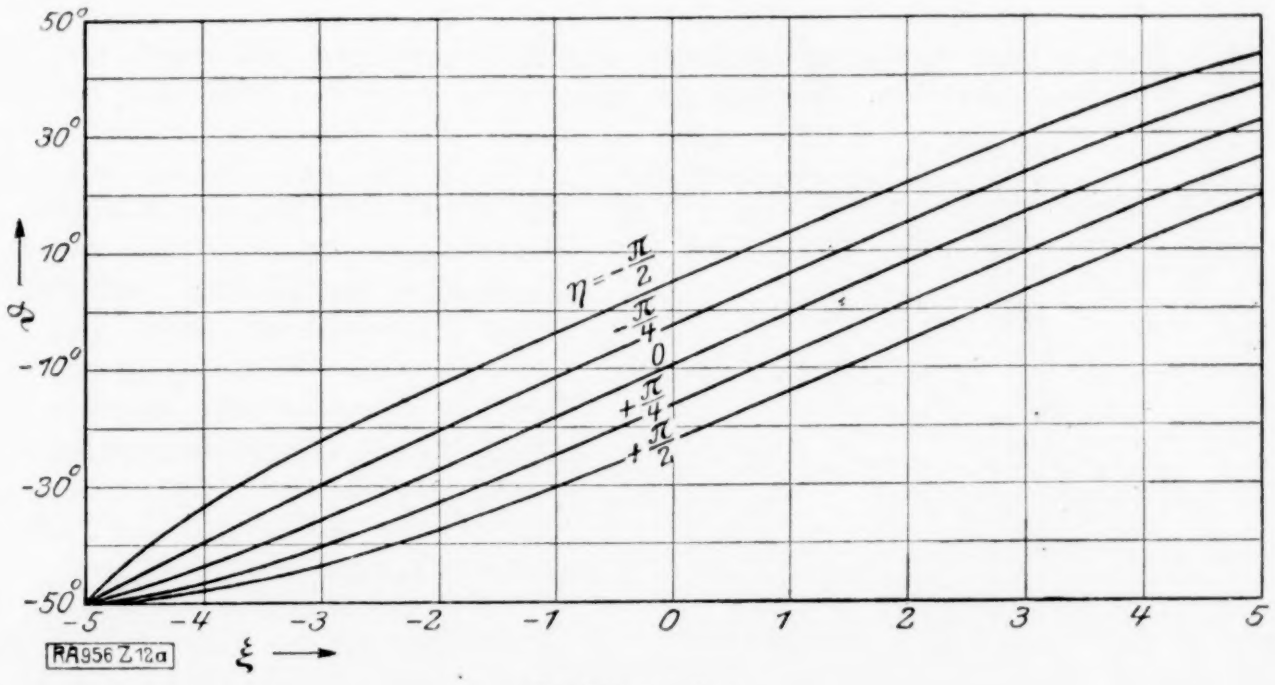
Aus den vorstehenden Gleichungen läßt sich folgendes entnehmen. Nach Gl. (64), (65) und (66) hängen $(\varphi_0)_m$, $(\varphi_k)_m$ und $(\psi_k)_m$ nur von $\Lambda\,(= -2\,\xi_0)$ und $\Pi\,(= r\pi)$ ab. Dasselbe gilt nach (54) und (55) für die Koeffizienten α_0, α_k, β_k, die jedoch außerdem der Temperatur Θ_0 proportional sind. Nach Gl. (63) ist daher auch der Ausdruck $\frac{\vartheta_m}{\Theta_0}$ nur von Λ und Π abhängig. Der Wirkungsgrad $\eta_{\text{Reg.}}$ ist somit nach (62) durch die reduzierte Regeneratorlänge Λ und die reduzierte Periodendauer Π allein bestimmt.

Bei unendlich kurzer Periodendauer reichen, wie schon S. 181 erörtert, die Eigenfunktionen u_0 und φ_0 allein zur Darstellung des Temperaturverlaufs im Regenerator aus. Wir erhalten dann

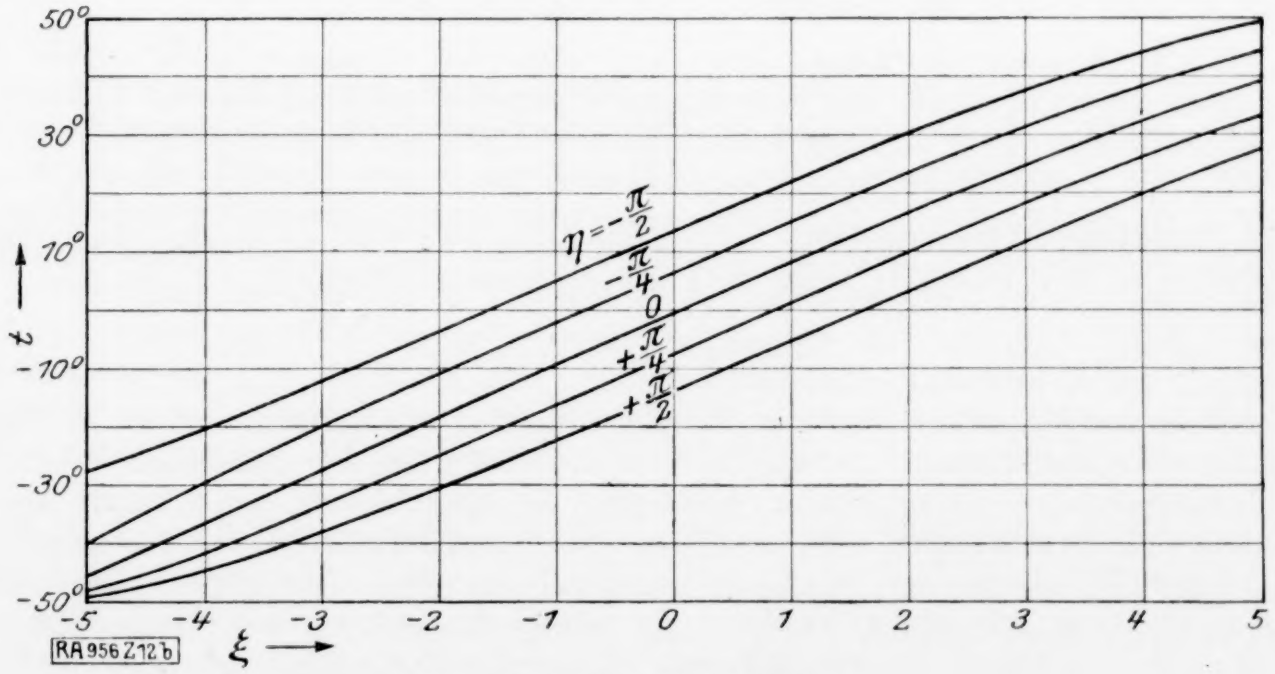
$$\vartheta = \alpha_0 (\eta - \xi + 1)$$

und, da dies für $\xi = \xi_0 = -\Lambda/2$ und $\eta = 0$ gleich Θ_0 werden soll, $\alpha_0 = \frac{+\Theta_0}{1 + \frac{\Lambda}{2}}$ und nach Gl. (64) und (63)

$$\vartheta_m = -\Theta_0 \cdot \frac{\Lambda - 2}{\Lambda + 2}.$$



Gastemperatur.



Temperatur der Speichermasse.

Abb. 12. Temperaturverlauf in der Längsrichtung des Regenerators.

Der Wirkungsgrad bei unendlich kurzer Periodendauer beträgt daher

$$\lim_{II=0}(\eta_{\text{Reg.}}) = \frac{\Lambda}{2+\Lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (68).$$

Es soll nun noch der Wirkungsgrad des Regenerators mit dem Wirkungsgrad eines Rekuperators verglichen werden, bei dem α, H, L, V, c_p für beide am Wärmeaustausch beteiligten Gase dieselben Werte haben wie in dem betrachteten Regenerator. Ist Δ die Temperaturdifferenz zwischen den beiden Gasen, die nach Voraussetzung 2) S. 174 an allen Stellen des Rekuperators gleich groß ist, und wird der Temperaturabfall in der wärmeübertragenden Rohrwand vernachlässigt, so wird in einer der Umschaltdauer des Regenerators entsprechenden Zeit $Z = V_0/V$ im Rekuperator folgende Wärmemenge übertragen:

$$Q = \alpha \cdot H \cdot L \cdot \frac{\Delta}{2} \cdot \frac{V_0}{V}$$

Da sich hierbei das kalte Gas von $\vartheta = \Theta_0$ bis $\vartheta = \Theta_1 - \Delta = -\Theta_0 - \Delta$ erwärmt, so ist auch

$$Q = V_0 \cdot c_p \cdot (-2\,\Theta_0 - \Delta).$$

Eliminiert man Δ aus diesen beiden Gleichungen, so folgt

$$Q = -V_0 \cdot c_p \cdot 2\,\Theta_0 \cdot \frac{\Lambda}{2+\Lambda}.$$

Da hier Q_{id} denselben Wert hat wie beim Regenerator, so erhalten wir als Wirkungsgrad des Rekuperators

$$\eta_{\text{Rek.}} = \frac{\Lambda}{2+\Lambda} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (69).$$

Bei unendlich kurzer Periodendauer ist somit der Wirkungsgrad des Regenerators ebenso groß wie der des Rekuperators. Hierbei ist jedoch zu beachten, daß der für unendlich kurze Periodendauer errechnete Grenzwert nur für den idealen, nicht aber für den wirklichen Regenerator gilt. In der Praxis kann man sich trotzdem diesem Grenzwert weitgehend nähern, da bei einer Umschaltzeit von nur wenigen Minuten der Wirkungsgrad von dem Grenzwert nur wenig abweicht und die durch das Umschalten bedingten Unterschiede zwischen idealem und wirklichem Regenerator in den meisten Fällen bereits vernachlässigt werden können.

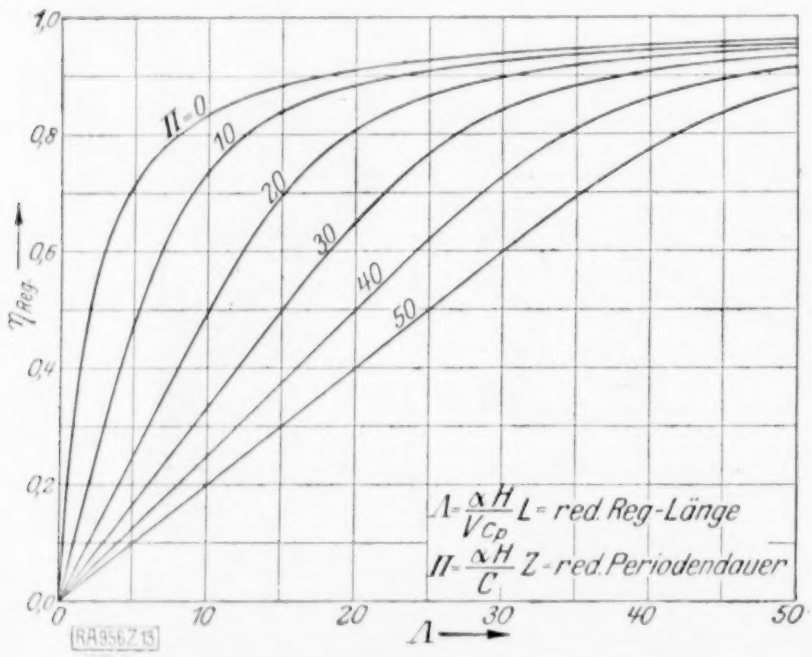


Abb. 13. Wirkungsgrad des Regenerators.

Die Zahlenrechnung ergibt, daß der Wirkungsgrad des Regenerators bei gegebenem Λ mit wachsender reduzierter Periodendauer abnimmt. Für $\Lambda = 10$ beträgt er z. B. bei $r = 1$ $(II = \pi)$: $\eta_{\text{Reg.}} = 0{,}819$; bei $r = 5$: $\eta_{\text{Reg.}} = 0{,}593$, während sich für unendlich kurze Periodendauer $\eta_{\text{Reg.}} = 0{,}833$ ergibt. In Abb. 13 ist der Wirkungsgrad für verschiedene Werte von II als Funktion von Λ aufgetragen.

10. Verallgemeinerungen. 1. Ungleiche Periodendauer. Die entwickelte Theorie gilt unter der Voraussetzung, daß die reduzierten Größen

$$\Lambda = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot L \quad \ldots\ldots \quad (12) \qquad \text{und} \qquad II = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot V_0 \quad \ldots\ldots \quad (13),$$

sowie die Wärmekapazität $V_0 \cdot c_p$ des Gases in beiden Perioden dieselben Werte haben. α und V können somit nach (12) und (13) in beiden Perioden verschieden sein, sofern nur das Verhältnis α/V gleich bleibt. Dies gibt die Möglichkeit, die Theorie angenähert auch auf den Fall anzuwenden, daß mehr als zwei Regeneratoren zusammenarbeiten, wie es z. B. bei den Winderhitzern im Hochofenbetrieb zutrifft. Hier dauert die Heizperiode häufig 3mal so lange wie die Abkühtung der Speichermasse, so daß von 4 Winderhitzern gleichzeitig 3 neu erwärmt werden müssen, während nur einer von dem zu erwärmenden »Wind« durchströmt wird. Die in den beiden verschieden langen Perioden strömenden

Gasmengen V_0 und V_0' müssen nach der Voraussetzung gleich groß sein, wenn c_p und c_p' gleich sind. Die in der Zeiteinheit während der Heizperiode durchströmende Gasmenge V' und die Geschwindigkeit w' betragen dann nur ein Drittel der entsprechenden Werte V und w in der Windperiode. Nach der Formel von Nußelt für den Wärmeübergang in Rohren strömender Gase ist die Wärmeübergangszahl α proportional $w^{0,786}$, wir können aber in erster Annäherung α der Geschwindigkeit w direkt proportional setzen. Dann ist die Bedingung $\frac{\alpha}{V} = \frac{\alpha'}{V'}$ erfüllt. Man wird daher eine recht gute Annäherung an die Wirklichkeit erhalten, wenn man A und Π zunächst für beide Perioden getrennt berechnet und dann die Theorie auf die hieraus bestimmten Mittelwerte von A und Π anwendet.

2. Die Wärmeübergangszahl ist von der Stelle x im Regenerator abhängig. Wenn die Regeneratoren wie im Eisenhüttenbetrieb bei hohen Temperaturen und zum Austausch sehr großer Temperaturdifferenzen benutzt werden, so nimmt die Wärmeübergangszahl infolge des Einflusses der Strahlung nach dem warmen Ende des Regenerators hin stark zu. Wir wollen daher $\alpha = f(x)$ setzen.

Es gelten zunächst unverändert die Differentialgleichungen (6) und (7). An Stelle von (8) müssen wir aber

$$d\xi = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

setzen, um wieder die Gl. (10) und (11) zu erhalten. Aus (70) folgt durch Integration

$$\xi = C + \int \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot dx = C + \frac{H}{V \cdot c_p} \int f(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71),$$

worin C eine Integrationskonstante bedeutet. Wählen wir C so, daß das linke Regeneratorende an die Stelle $x = 0$ kommt, so finden wir aus (71)

$$\xi = \xi_0 + \frac{H}{V \cdot c_r} \int_0^x f(x)\, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71\,a)$$

und hieraus an Stelle von Gl. (12)

$$A = \frac{H}{V \cdot c_p} \int_0^L f(x)\, dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72).$$

Hingegen gilt unverändert die Beziehung (13), d. h. es muß

$$\Pi = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot V_0$$

konstant sein, was bei gleichbleibendem H, V und V_0 nur möglich ist, wenn sich C proportional α ändert. Die Theorie kann also auch bei veränderlichem α angewendet werden, wenn dort, wo infolge einer höheren Wärmeübergangszahl in der Zeiteinheit eine größere Wärmemenge übertragen wird, je m Regeneratorlänge auch eine entsprechend größere Wärmekapazität der Speichermasse zur Verfügung steht, um diese Wärmemenge aufnehmen zu können.

11. Berechnung des Temperaturverlaufs im Regenerator bei gleicher Strömungsrichtung der Gase in beiden Perioden. Im Falle des Gleichstroms gestaltet sich die Berechnung des streng periodischen Zustandes erheblich einfacher als bei entgegengesetzter Strömungsrichtung der Gase. Vom wärmetechnischen Standpunkt aus ist es unwesentlich, daß in den beiden Perioden, die wieder gleich lang angenommen werden sollen, Gase verschiedener Art den Regenerator durchströmen. Der Temperaturverlauf bleibt daher derselbe, wenn wir annehmen, daß ein und dasselbe Gas am linken Regeneratorende, wo $\xi = 0$ sei, in gleichen Zeitabständen abwechselnd mit der konstanten Temperatur $\vartheta = +\,\Theta_0$ und $\vartheta = -\,\Theta_0$ eintritt. Wir erhalten also, wenn die eine Periode von $\eta = -\,r\,\pi$ bis $\eta = 0$, die zweite von $\eta = 0$ bis $\eta = +\,r\,\pi$ dauert, für $\xi = 0$ die Grenzbedingung

$$\vartheta = \Theta_0 \text{ für } -\,r\,\pi < \eta < 0\,, \qquad \vartheta = -\,\Theta_0 \text{ für } 0 < \eta < r\,\pi \quad . \quad . \quad (73).$$

Ist diese Bedingung erfüllt und setzen wir außerdem voraus, daß sich bei jedem Zuwachs von η um $2\,r\,\pi$ der Vorgang in der gleichen Weise wiederholt, so ist auch die Gewähr für ein richtiges Umschalten gegeben. Es erübrigt sich daher die Aufstellung einer besonderen Umschaltbedingung, sofern wir Lösungen der Differentialgleichungen benutzen,

die in bezug auf η rein periodisch sind und im Grundintervall $2\,r\,\pi$ eine ganze Zahl von Perioden durchlaufen.

Die auf S. 178 gefundene partikuläre Lösung (Gl. (20) und (21)) erhält, wenn wir C statt $-\frac{1+n}{2}\,C$ schreiben, folgende Gestalt

$$\vartheta = C\cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n}-\frac{2\eta}{1-n}} \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{a}), \qquad t = -\frac{1-n}{1+n}\cdot C\cdot e^{-\frac{2\xi}{1+n}-\frac{2\eta}{1-n}} \quad (21\,\mathrm{a}).$$

Diese Lösung wird eine rein periodische Funktion von η mit k Perioden im Bereich $r\,\pi$, wenn wir

$$\frac{2}{1-n} = i\cdot\frac{k}{r}$$

setzen, wobei i die imaginäre Einheit und k eine reelle ganze Zahl bedeutet. Wir erhalten dann

$$\vartheta_k = C_k\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi + i\left(\frac{rk}{r^2+k^2}\xi - \frac{k}{r}\eta\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74),$$

$$t_k = \frac{r^2+i\,r\,k}{r^2+k^2}\,C_k\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi + i\left(\frac{rk}{r^2+k^2}\xi - \frac{k}{r}\eta\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75).$$

Damit sich reelle Funktionen ergeben, kombinieren wir mit den Gl. (74) und (75) zwei entsprechende mit dem entgegengesetzten Vorzeichen von k

$$\vartheta_{-k} = C_{-k}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi - i\left(\frac{rk}{r^2+k^2}\xi - \frac{k}{r}\eta\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76),$$

$$t_{-k} = \frac{r^2-i\,r\,k}{r^2+k^2}\,C_{-k}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi - i\left(\frac{rk}{r^2+k^2}\xi - \frac{k}{r}\eta\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77).$$

Setzen wir zunächst $C_k = C_{-k} = \frac{1}{2\,i}$, so erhalten wir durch Subtraktion der Gl. (74) und (75) von (76) und (77) die neuen Eigenfunktionen

$$u_k = t_{-k} - t_k = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+k^2}}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi}\cdot\sin\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{rk}{r^2+k^2}\,\xi - \operatorname{arctg}\frac{k}{r}\right\} \quad . \quad (78),$$

$$q_k = \vartheta_{-k} - \vartheta_k = e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi}\cdot\sin\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{rk}{r^2+k^2}\,\xi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79).$$

Mit $C_k = C_{-k} = {}^1/_2$ folgt hingegen durch Addition derselben Gleichungen:

$$v_k = t_k + t_{-k} = \sqrt{\frac{r^2}{r^2+k^2}}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi}\cdot\cos\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{rk}{r^2+k^2}\,\xi - \operatorname{arctg}\frac{k}{r}\right\} \quad . \quad . \quad (80),$$

$$\psi_k = \vartheta_k + \vartheta_{-k} = e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\xi}\cdot\cos\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{rk}{r^2+k^2}\,\xi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81).$$

Sonderfall $k = 0$. Für unendlich kleine Werte von k folgt aus den Gl. (78) bis (81)

$$u_0 = q_0 = \frac{k}{r}(\eta - \xi) = 0\,, \qquad v_0 = \psi_0 = 1\,.$$

Aus u_0 und q_0 könnte man zwar durch Multiplikation mit dem unendlich großen Faktor r/k wie früher die endliche lineare Funktion $\eta - \xi$ erhalten, doch würde diese Funktion der Forderung widersprechen, daß die Eigenfunktionen bei einem Zuwachs von η um $2\,r\,\pi$ ihren Wert nicht ändern sollen. Es muß daher $u_0 = q_0 = 0$ sein.

k sehr groß. Wenn k so groß ist, daß man r^2 gegen k^2 vernachlässigen kann, so nehmen die Gl. (78) bis (81) folgende Gestallt an:

$$u_k = \frac{r}{k}\cdot e^{-\xi}\cdot\sin\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{r}{k}\,\xi - \frac{\pi}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82),$$

$$q_k = e^{-\xi}\cdot\sin\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{r}{k}\,\xi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83),$$

$$v_k = \frac{r}{k}\cdot e^{-\xi}\cdot\cos\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{r}{k}\,\xi - \frac{\pi}{2}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84),$$

$$\psi_k = e^{-\xi}\cdot\cos\left\{\frac{k}{r}\,\eta - \frac{r}{k}\,\xi\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Durch Vergleich mit den früheren Gleichungen (48) bis (51) erkennt man, daß bei großen Werten von k, abgesehen von dem fehlenden Faktor $e^{+\eta/2}$, die Eigenfunktionen für den

Fall des Gleichstroms die Gestalt der bei Gegenstrom auftretenden Schwingungsglieder annehmen und auch deren wichtigste Eigenschaften teilen.

12. Anpassung an die Anfangsbedingung durch Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen. Um eine allgemeine Lösung zu erhalten, bilden wir aus den gefundenen Eigenfunktionen die Reihen:

$$\vartheta = \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \ldots \alpha_k \eta_k + \ldots + \beta_0 \psi_0 + \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 + \ldots \beta_k \psi_k + \ldots \quad (86).$$

$$t = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots \alpha_k u_k + \ldots + \beta_0 v_0 + \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \ldots \beta_k v_k + \ldots \quad (87).$$

Die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots$ usw. sollen so bestimmt werden, daß durch die Reihe (86) an der Stelle $\xi = 0$ die Anfangsbedingung (73) erfüllt wird. Da η_k und ψ_k in bezug auf η reine sin- und cos-Funktionen darstellen, so können die Koeffizienten nach der Methode von Fourier ermittelt werden. Ist Θ_0 konstant, so erhalten wir nach diesem Verfahren:

$$\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_k \ldots = 0, \qquad \alpha_k = -\frac{4\,\Theta_0}{\pi\, k} \text{ für } k \text{ ungerade}, \qquad \alpha_k = 0 \text{ für } k \text{ gerade}.$$

Die gesuchte Lösung lautet daher nach (86) und (87):

$$\vartheta = -\frac{4\,\Theta_0}{\pi}\left[\eta_1 + \frac{1}{3}\,\eta_3 + \frac{1}{5}\,\eta_5 + \frac{1}{7}\,\eta_7 + \ldots\right] \quad (88),$$

$$t = -\frac{4\,\Theta_0}{\pi}\left[u_1 + \frac{1}{3}\,u_3 + \frac{1}{5}\,u_5 + \frac{1}{7}\,u_7 + \ldots\right] \quad (89).$$

Berechnung des Wirkungsgrades. Ist $\vartheta_m = \frac{1}{r\,\pi}\int_{-r\pi}^{0} \vartheta\, d\,\eta$ der Mittelwert der Gastemperatur in der Kaltperiode beim Austritt aus dem rechten Regeneratorende an der Stelle $\xi = \Lambda$, so erhält man wie beim Gegenstrombetrieb als Wirkungsgrad

$$\eta_{\text{Reg.}} = \frac{Q}{Q_{id}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vartheta_m}{\Theta_0}\right) \quad (62).$$

Nach (88) erhalten wir für ϑ_m

$$\vartheta_m = -\frac{4\,\Theta_0}{\pi}\left[(\eta_1)_m + \frac{1}{3}\,(\eta_3)_m + \frac{1}{5}\,(\eta_5)_m + \ldots \frac{1}{k}\cdot(\eta_k)_m + \ldots\right] \text{ (mit } k \text{ ungerade)},$$

wenn $(\eta_k)_m$ den Mittelwert $\frac{1}{r\,\pi}\int_{-r\pi}^{0} \eta_k\, d\,\eta$ an der Stelle $\xi = \Lambda$ bedeutet. Da somit nach Gl. (79)

$$(\eta_k)_m = \frac{(-1)^k - 1}{k\cdot\pi}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\cdot\Lambda}\cdot\cos\left(\frac{r\,k}{r^2+k^2}\cdot\Lambda\right),$$

so folgt

$$\vartheta_m = \sum_{k=1,3,5,7\ldots}^{\infty} \frac{8\,\Theta_0}{(k\cdot\pi)^2}\cdot e^{-\frac{k^2}{r^2+k^2}\cdot\Lambda}\cdot\cos\left(\frac{r\,k}{r^2+k^2}\Lambda\right) \quad (90),$$

womit nach (62) der Wirkungsgrad berechnet werden kann.

13. Zusammenfassung. Der im Regenerator bei gleichbleibender endlicher Periodendauer nach unendlich häufigem Umschalten sich einstellende streng periodische Temperaturverlauf der Gase und der Speichermasse wird unter der Annahme berechnet, daß die Wärmeleitfähigkeit der Speichermasse in der Strömungsrichtung der Gase vernachlässigbar klein, senkrecht hierzu hingegen unendlich groß ist. In der Hauptsache wird der Fall behandelt, daß in zwei aufeinanderfolgenden Perioden Gasmengen von gleicher Wärmekapazität den Regenerator in entgegengesetzter Richtung durchströmen.

Aus den sich ergebenden linearen partiellen Differentialgleichungen folgt, daß der Temperaturverlauf, der zunächst von den sieben Veränderlichen

α = Wärmeübergangszahl,
H = Heizfläche je m Regeneratorlänge,
C = Wärmekapazität der Speichermasse je m Reg.-Länge,
V = Gasmenge je Stunde in cbm,

c_p = spezifische Wärme von 1 cbm Gas,
x = Längenkoordinate in der Strömungsrichtung,
v = zur Zeit z hindurchgeströmte Gasmenge

abhängt, als Funktion von nur zwei Größen

$$\xi = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot x, \qquad \eta = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot C} \cdot v$$

dargestellt werden kann. Die Differentialgleichungen haben eine unendliche Zahl von partikulären Lösungen, von denen jede der durch das Umschalten gegebenen mathematischen Bedingung genügt. Die erste dieser Eigenfunktionen entspricht einem zeitlich und örtlich linearen Temperaturverlauf. Alle übrigen Eigenfunktionen bestehen aus zwei Gliedern, die nach dem Regeneratorinnern hin kleiner werden. Das eine Glied stellt Temperaturschwingungen mit wachsender Amplitude dar, während das zweite Glied zeitlich aperiodisch abnimmt. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen erhält man durch Reihenentwicklung nach diesen Eigenfunktionen, wobei die Koeffizienten so bestimmt werden, daß die Bedingung der konstanten Eintrittstemperatur der Gase erfüllt wird. Der für das Gas und die Speichermasse errechnete Temperaturverlauf ist für ein Zahlenbeispiel graphisch dargestellt.

Der ebenfalls berechnete Wirkungsgrad des Regenerators hängt, wenn seine Länge L und die Zeit zwischen zwei Umschaltungen Z beträgt, nur von der »reduzierten Länge« $A = \frac{\alpha \cdot H}{V \cdot c_p} \cdot L$ und von der »reduzierten Periodendauer« $\Pi = \frac{\alpha \cdot H}{C} \cdot Z$ ab. Bei unendlich kurzer Periodendauer ist der Wirkungsgrad des Regenerators (im Idealfall) ebenso groß wie der eines Rekuperators mit gleicher Heizfläche und gleicher Wärmeübergangszahl und nimmt mit wachsender Periodendauer ab.

Durch eine Koordinatentransformation läßt sich die entwickelte Theorie auch auf den Fall übertragen, daß die Wärmeübergangszahl längs des Regenerators veränderlich ist.

Am Schlusse wird auch der Fall gleicher Strömungsrichtung der Gase kurz behandelt. 956

Systeme von Doppelquellen in der ebenen Strömung, insbesondere die Strömung um zwei Kreiszylinder.

Von **WILHELM MÜLLER** in Hannover.

1. Einleitung. Bekanntlich läßt sich jedes stetige und eindeutige, stationäre Stromfeld einer idealen Flüssigkeit aus einer bestimmten Verteilung von Quellen und Senken ableiten. Die direkte Auffindung des Potentials bei gegebener Berandung wird allerdings im allgemeinen nicht streng durchführbar sein. Nur im Falle der kreisförmigen Grenze führt die Anwendung des bekannten Spiegelungsprinzips unmittelbar zur Lösung der Randwertaufgabe.

Eine Parallelströmung kann z. B. aufgefaßt werden als hervorgebracht durch eine im Unendlichen gelegene Doppelquelle, die sich aus einer Quelle und einer benachbarten Senke zusammensetzt. Wenn man diese Doppelquelle an einem Kreiszylinder vom Radius a spiegelt, so erhält man bei einer Parallelstromgeschwindigkeit u_0 eine Doppelquelle im Mittelpunkt des Kreises vom Moment $2\pi u_0 a^2$, die in Verbindung mit der unendlich fernen Doppelquelle eine Strömung erzeugt, für welche der Kreisrand mit zum System der Stromlinien gehört [1]). Wir wollen nun in Verallgemeinerung dieses Falles einige bemerkenswerte und der elementaren Rechnung zugängliche Systeme von Doppelquellen im Parallelstrom ins Auge fassen und die zugehörigen geometrischen und dynamischen Beziehungen entwickeln, die für gewisse praktische Einzelfragen von Bedeutung sein können. Dabei werden wir insbesondere auf die Strömung um zwei Kreiszylinder geführt, für die sich eine gute Annäherungsrechnung, aber auch eine strenge Reihenentwicklung aufstellen läßt. Die Kenntnis dieser Strömung kann als Grundlage gelten für die technisch wichtige Untersuchung der Kräfteverhältnisse eines Tragflügels in der Nähe des Erdbodens.

[1]) Vergl. etwa W. Müller, Mathematische Strömungslehre, Berlin 1928, S. 79.

I. Einfache Systeme von Doppelquellen[1]).

2. System zweier Doppelquellen, die in Richtung der Parallelströmung orientiert sind. Wir legen zwei Doppelquellen von dem Moment m zugrunde, die auf der reellen Achse eines komplexen Koordinatensystems liegen und nach der positiven x-Seite orientiert sind. Wenn die imaginäre Achse durch den Mittelpunkt der Verbindungsstrecke gelegt und der Abstand der Doppelquellen $= 2b$ gesetzt wird, so entsteht die komplexe Stromfunktion

$$W = -\frac{m}{2\pi}\left(\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z+b}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Wenn wir ferner die Radienvektoren von den Doppelquellpunkten nach dem Aufpunkt mit r_1 und r_2, die entsprechenden Argumente mit φ_1 und φ_2 bezeichnen, so ist die Schar der Stromlinien enthalten in

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\left(\frac{\sin\varphi_1}{r_1}+\frac{\sin\varphi_2}{r_2}\right) = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

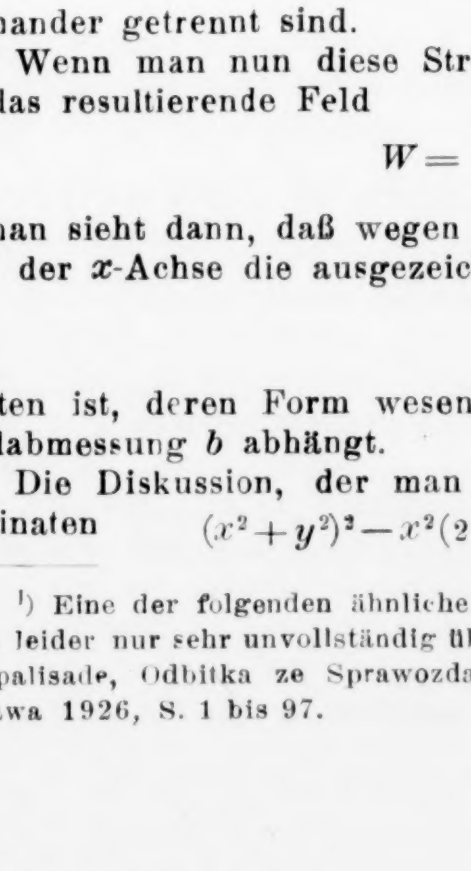


Abb. 1.

Die Konstruktion geschieht am besten nach der Diagonalmanier aus einer doppelten Reihe von Kreisen, welche die x-Achse in den Quellpunkten A_1 und A_2 berühren und deren Durchmesser den reziproken Werten einer arithmetischen Reihe (etwa $^1/_{48}$, $^2/_{48}$, $^3/_{48}$ . . . . .)

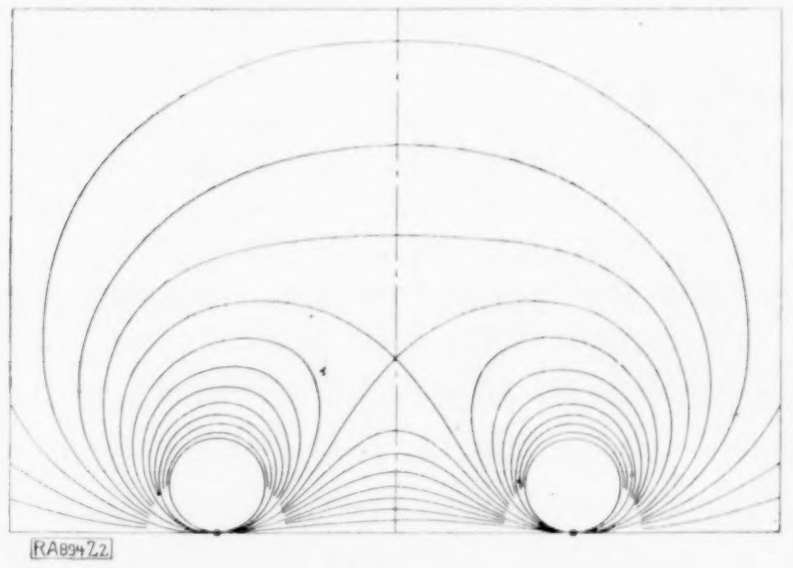


Abb. 2.

gleich sind (vergl. Abb. 1). Dadurch erhält man das Bild der Abb. 2, aus der man ersieht, daß die Stromlinienschar zwei Typen von Kurven enthält, die durch die ausgezeichnete Schleifenkurve

$$\frac{\sin\varphi_1}{r_1}+\frac{\sin\varphi_2}{r_2}=\frac{1}{b}$$

voneinander getrennt sind.

Wenn man nun diese Strömung mit einer Parallelströmung verbindet, so erhält man das resultierende Feld

$$W = -u_0 z - \frac{m}{2\pi}\left(\frac{\sin\varphi_1}{r_1}+\frac{\sin\varphi_2}{r_2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und man sieht dann, daß wegen $\sin\varphi_1 = y/r_1$, $\sin\varphi_2 = y/r_2$ in der Schar der Stromlinien neben der x-Achse die ausgezeichnete »Nullkurve«

$$\frac{2\pi u_0}{m} = \frac{2}{c^2} = \frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

enthalten ist, deren Form wesentlich von dem Verhältnis der Längenkonstanten c zur Grundabmessung b abhängt.

Die Diskussion, der man am zweckmäßigsten die Gleichung in rechtwinkeligen Koordinaten $(x^2+y^2)^2 - x^2(2b^2+c^2)+y^2(2b^2-c^2)+b^2(b^2-c^2)=0$ . . . . (5)

[1]) Eine der folgenden ähnliche Betrachtung ist in einer polnischen Arbeit durchgeführt worden, die ich leider nur sehr unvollständig übersetzen konnte: Stefan Neumark, Przepływ Cieczy doskonalej przez palisade, Odbitka ze Sprawozdan i Prac Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, Nr. 10, Warszawa 1926, S. 1 bis 97.

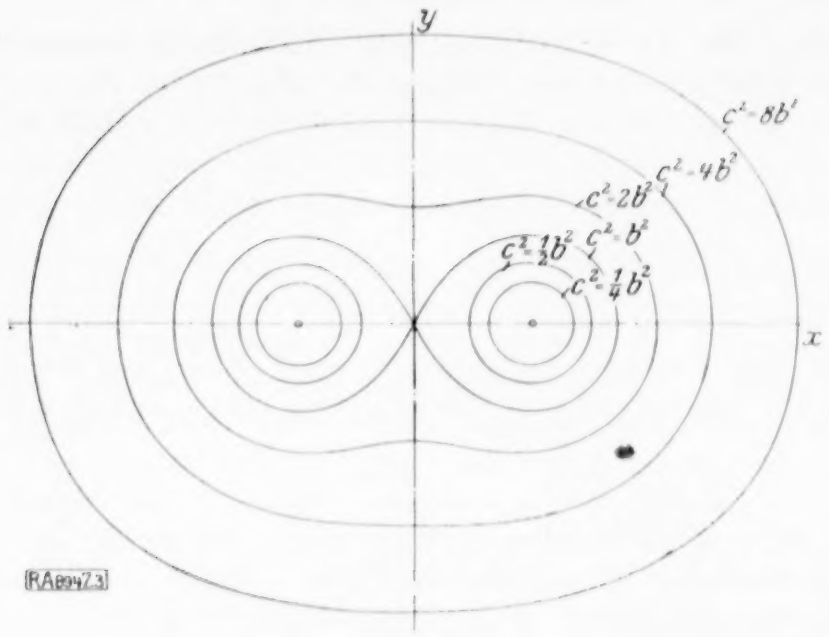


Abb. 3.

zugrunde legt, ergibt in Uebereinstimmung mit der Abb. 3 eine Schar von Kurven, die eine gewisse Aehnlichkeit mit den Cassinischen Kurven haben. Dem Werte $c^2 = b^2$ entspricht eine singuläre lemniskatenartige Schleifenkurve, deren Tangenten mit der Realachse einen Winkel von 60^0 resp. 120^0 bilden. Während ferner zu dem Wertebereich $c^2 < b^2$ zwei getrennte geschlossene Kurvenzweige innerhalb der Lemniskatenschleife gehören, erhält man für $c^2 > b^2$ einfach geschlossene Kurven, die für $c^2 < 4\,b^2$ eine Eindrückung in der Mitte zeigen und für $c^2 > 4\,b^2$ eine ellipsenartige Gestalt annehmen. Um den Geschwindigkeitsverlauf längs dieser Kurven, die als Strömungsgrenze aufgefaßt werden können, zu bestimmen, bilden wir die Ableitung von (3) und erhalten dann aus

$$\bar{v} = v_x - i\,v_y = \frac{d\,W}{d\,z} = -\,u_0 + \frac{m}{2\,\pi}\left(\frac{e^{-2i\varphi_1}}{r_1^2} + \frac{e^{-2i\varphi_2}}{r_2^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

mit Benutzung von (4)

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\,u_0 + \frac{m}{2\,\pi}\left(\frac{\cos 2\,\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\cos 2\,\varphi_2}{r_2^2}\right) = -\,u_0\,c^2\left(\frac{\sin^2\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi_2}{r_2^2}\right) \\ v_y &= \frac{m}{2\,\pi}\left(\frac{\sin 2\,\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin 2\,\varphi_2}{r_2^2}\right) = u_0\,c^2\left(\frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{r_1^2} + \frac{\sin\varphi_2\cos\varphi_2}{r_2^2}\right) \end{aligned}\right| \quad . \quad . \quad (6\,\mathbf{a}),$$

$$v^2 = u_0^2\,c^4\left[\frac{\sin^2\varphi_1}{r_1^4} + \frac{\sin^2\varphi_2}{r_2^4} + \frac{2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)}{r_1^2\,r_2^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6\,\mathbf{b}).$$

Die Geschwindigkeit längs einer der Kurven (4) kann daher als dritte Seite eines Dreiecks konstruiert werden, dessen zwei andere Seiten die Längen $u_0 \cdot \frac{c^2 \sin\varphi_1}{r_1^2}$ und $u_0 \cdot \frac{c^2\sin\varphi_2}{r_2^2}$ haben und den Winkel $\pi - (\varphi_1 - \varphi_2)$ der Radienvektoren miteinander bilden.

3. Strömung um zwei Kreiszylinder in erster Annäherung. Bemerkenswert ist nun die Tatsache, daß die beiden dem Wertebereich $c^2 < b^2$ entsprechenden Kurvenzweige sehr schnell gegen die Kreisform konvergieren. Man kann daher die kombinierte Strömung (3) in diesem Falle mit guter Annäherung als eine Strömung um zwei Kreiszylinder auffassen. Um den Grad der Genauigkeit zu ermitteln, setzen wir etwa $c^2 = \lambda\,b^2$, wo λ eine Zahl < 1 bezeichnet und betrachten den aus der Gl. (4) sich ergebenden Ausdruck

$$r_1^2 = \frac{\frac{1}{2}\,\lambda\,b^2}{1 - \frac{1}{2}\,\lambda\,\frac{b^2}{r_2^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

der, $r_1^2 > b$ vorausgesetzt, offenbar für die beiden Schnittpunkte der Kurve mit der x-Achse den kleinsten und größten Wert annimmt. Wenn man die diesen Schnittpunkten entsprechenden Werte von $(b/r_2)^2$, etwa mit Benutzung der Gl. (5) in (7) einsetzt und das Verhältnis δ beider Extremwerte zum mittleren Radius $(r_1)_m$, ferner das Verhältnis $\frac{(r_1)_m}{b}$ des mittleren Radius $(r_1)_m = {}^1/_2\,[(r_1)_{\min} + (r_1)_{\max}]$ zum halben Abstand der Mittelpunkte berechnet, so ergibt sich folgende Tabelle. Man erkennt daraus, daß bereits in dem Falle, wo der Abstand zweier Kreiszylinder nur doppelt so groß ist als der Durchmesser jedes Zylinders, der »Berandungsfehler« δ, den man begeht, wenn man die Strömung um beide Zylinder nach der Funktion (3) konstruiert, nur etwa 3 vH ausmacht. Um die Konstruktion durchzuführen, hat man zunächst für die Folge der Strom-

λ	$(r_1)_{\min}$	$(r_1)_{\max}$ ($a = 1$)	$\frac{r_m}{b}$	δ
0,5	0,51	0,533	0,52	0,038
0,4	0,455	0,469	0,46	0,027
0,3	0,394	0,4	0,41	0,017
0,2	0,319	0,324	0,32	0,012

linien der reinen Doppelquellströmung die Grunddifferenz $\Delta \frac{\sin \varphi}{r} = \frac{1}{e}$ zu wählen, und erhält dann die zugehörigen Abstände Δy der Parallelstromlinien zu

$$\Delta y = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{1}{e} .$$

Um den auf einen Zylinder ausgeübten resultierenden Strömungsdruck in erster Annäherung zu berechnen, kann man mit Vorteil eine von M. Lagally[1]) angegebene Formel verwenden. Bezeichnen wir mit c_1 den Koeffizienten der ersten negativen Potenz von z in der Geschwindigkeitsreihe, mit v_∞ die im Unendlichen herrschende Geschwindigkeit, ferner mit $\bar{v}_i^*$ die Strömungsgeschwindigkeit an der Stelle der i-ten außerhalb des Zylinders gelegenen Doppelquelle, die von den übrigen Singularitäten herrüht, so hat der an der Realachse gespiegelte Kraftvektor bei Abwesenheit von einfachen Quellen und Wirbeln die Form

$$\bar{P} = 2 \pi \varrho c_1 v_\infty + \varrho \Sigma m \frac{d \bar{v}_i^*}{d z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Wenn wir uns auf die erste Näherung beschränken, also nur zwei Doppelquellen voraussetzen, von denen die eine innerhalb, die andere außerhalb eines Zylinders gelegen ist, erhalten wir zur Berechnung der auf den Zylinder ausgeübten Kraft $c_1 = 0$ und

$$\bar{v}^* = - u_0 + \frac{m}{2 \pi (z - b)^2}, \qquad \left(\frac{d \bar{v}^*}{dz}\right)_{z=-b} = - \frac{m}{8 \pi b^3}, \qquad \bar{P} = \varrho \frac{m^2}{8 \pi b^3},$$

oder mit $m = 2 \pi u_0 a^2$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \pi \varrho u_0^2 \frac{a^4}{b^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Wenn die beiden Zylinder also frei sind, so bewegen sie sich mit einer Kraft auseinander, welche dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit und der vierten Potenz des Radius direkt und der dritten Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist.

4. Zwei Doppelquellen mit senkrecht zur Strömung gerichteter Verbindungslinie. Wenn wir die Richtung der Parallelströmung beibehalten, die Doppelquellen aber auf die y-Achse, nach $\pm i b$ verlegen, so erhalten wir das resultierende Strömungspotential

$$W = - u_0 z - \frac{m}{2 \pi} \left(\frac{1}{z - i b} + \frac{1}{z + i b}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10) .$$

und man sieht wieder, daß in der Schar der Stromlinien

$$- u_0 y + \frac{m}{2 \pi} \left(\frac{\sin \varphi_1}{r_1} + \frac{\sin \varphi_2}{r_2}\right) = \text{konst.}$$

die ausgezeichnete Kurve enthalten ist, die sich in die x-Achse und die Kurve

$$\frac{2 \pi u_0}{m} = \frac{2}{c^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{4 b^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{2 (x^2 + y^2 - b^2)}{r_1^2 r_2^2}$$

oder

$$(x^2 + y^2 + b^2)^2 - c^2 (x^2 + y^2 - b^2) - 4 b^2 y^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

zerlegt. In der Schar dieser Kurven, von denen einige in der Abb. 4 dargestellt sind, ist der Fall $c^2 = 8 b^2$ dadurch bemerkenswert, daß die Kurve 4. Ordnung in zwei Kreise zerfällt:

$$[x^2 + (y - b)^2 - 4 b^2] [x^2 + (y + b)^2 - 4 b^2] = 0 ,$$

deren Mittelpunkte in die Doppelquellpunkte fallen und deren Radien dem Abstand der Doppelquellen gleich sind. Damit ist aber gleichzeitig auf direktem Wege eine einfache graphische Darstellung der ebenen Strömung gefunden worden, die von einem Kreiszylinder und einer Ebene begrenzt wird, deren Abstand vom Kreismittelpunkt der Hälfte des Kreisradius gleich ist. In der Abb. 5 ist sowohl das oberhalb der Symmetrieachse $y = 0$ gelegene, von den Doppelquellen herrührende, als auch das mit der Parallelströmung zusammengesetzte Stromsystem nach der oben auseinandergesetzten Methode gezeichnet.

Um die Geschwindigkeits- und Druckverteilung längs des Zylinders zu bestimmen, hat man in dem Ausdruck

$$\bar{v} = - u_0 + 4 b^2 u_0 \left(\frac{1}{(z - i b)^2} + \frac{1}{(z + i b)^2}\right)$$

[1]) M. Lagally, Ueber den Druck einer strömenden Flüssigkeit auf eine geschlossene Fläche, Sitzungsberichte der Bayr. Akad. der Wiss., 1921, S. 223 und 225.

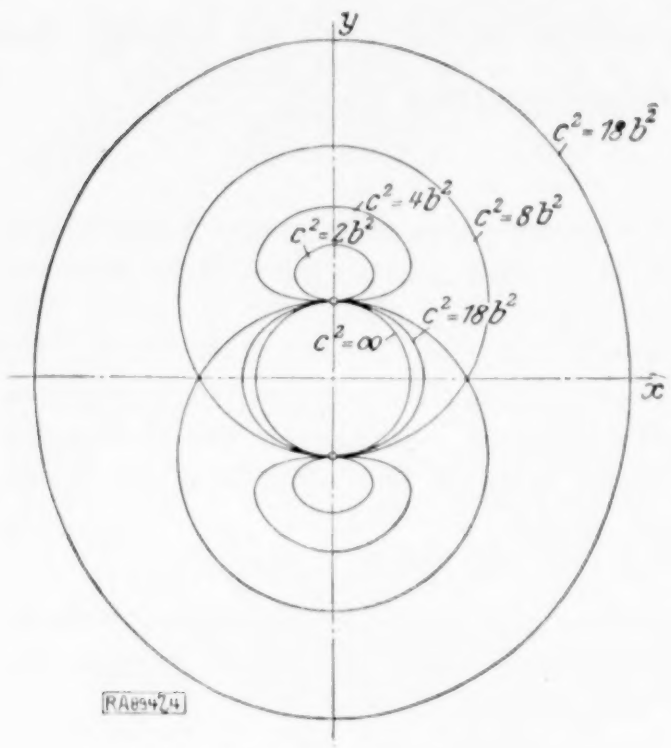


Abb. 4.

$z = b\,(i + 2\,e^{i\varphi})$ zu setzen. Dann ergibt sich nach einer einfachen Rechnung

$$\overline{v} = -\frac{1}{2}\,u_0\,\frac{(1+2\sin\varphi)^2}{1+\sin\varphi}\,i\,e^{-i\varphi},$$

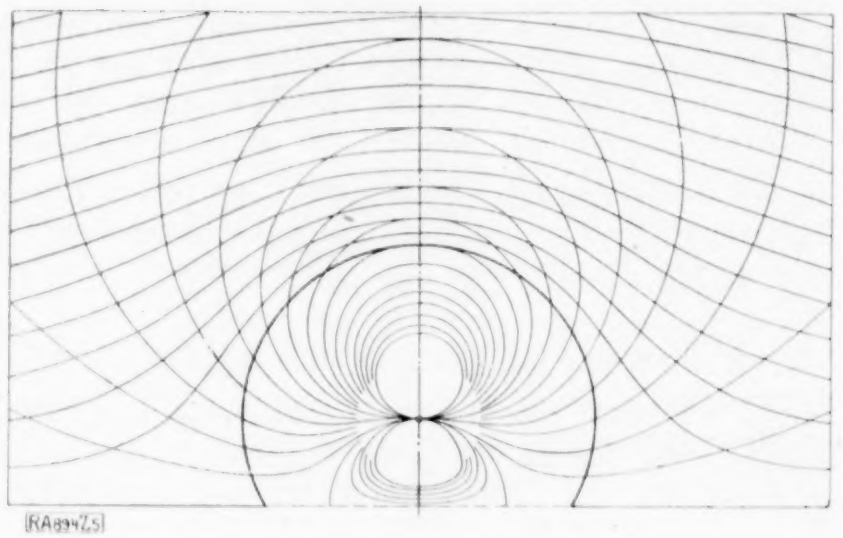


Abb. 5.

also für die Geschwindigkeit

$$|v| = \frac{1}{2}\,u_0\,\frac{(1+2\sin\varphi)^2}{1+\sin\varphi} = \frac{1}{2}\,u_0\,(\cos^{-2}\varphi + 4\sin\varphi - \sin\varphi\cos^{-2}\varphi) \quad . \quad . \quad (12).$$

φ	$\frac{v}{v_0}$
-30^0	0
0	0,5
18^0	1
30^0	1,33
45^0	1,71
60^0	2,0
90^0	2,25

Die aus diesem Ausdruck resultierende Geschwindigkeitsverteilung ist aus der gegebenen Tabelle zu entnehmen. Um die resultierende auf den Kreiszylinder pro Längeneinheit wirkende Druckkraft zu bestimmen, hat man folgendes Integral auszuwerten:

$$\frac{1}{2}\,P = -2\,b\int_{-\pi/6}^{\pi/2} p\sin\varphi\,d\varphi = -2\,b\,\varrho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}\left(1-\frac{v^2}{u_0^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi$$

$$= -2\,b\varrho\int_{-\pi/6}^{\pi/2}(\sin^2\varphi - \frac{1}{4}\sin\varphi\cos^{-4}\varphi - 4\sin^3\varphi - \frac{1}{4}\sin^3\varphi\cos^{-4}\varphi$$

$$-2\sin^2\varphi\cos^{-2}\varphi + \frac{1}{2}\sin^2\varphi\cos^{-4}\varphi + 2\sin^3\varphi\cos^{-2}\varphi)\,d\varphi\,.$$

Mit Berücksichtigung der unbestimmten Integrale

$$\int\sin^3\varphi\,d\varphi = -\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\,, \quad \int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi} = \cos^{-1}\varphi\,, \quad \int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\cos^{-3}\varphi\,,$$

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi\,, \quad \int\frac{d\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\varphi + \frac{\sin\varphi}{3\cos^3\varphi}$$

ergibt sich

$$P = 4\,b\,\varrho\left(4\sqrt{3} - \frac{2}{3}\,\pi - \frac{13}{18}\right) = 16{,}4\,\varrho\,b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

5. System dreier Doppelquellen. In der Schar der Stromlinien der beiden im letzten Abschnitt betrachteten Doppelquellen ist auch der Kreis $x^2 + y^2 = b^2$ enthalten. Daraus ergibt sich, daß dieser Kreis auch in der Verbindung mit der Parallelströmung als Stromlinien erhalten bleibt, wenn man gleichzeitig eine dritte Doppelquelle im Nullpunkt von der Stärke $2\,\pi\,u_0\,b^2$ hinzufügt. Die Gesamtströmung hat dann das Potential

$$W = -u_0 z - \frac{u_0\,b^2}{z} - \frac{m}{2\,\pi}\left(\frac{1}{z-ib} + \frac{1}{z+ib}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

und man sieht in der Tat, daß die Stromlinie

$$-u_0 + \frac{u_0\,b^2}{r^2} + \frac{m}{\pi\,r_1^2\,r_2^2}(r^2 - b^2) = 0$$

in den Kreis $r^2 - b^2 = 0$ und die Kurve

$$r_1^2 r_2^2 = \frac{m}{\pi u_0} r^2 = 2 c^2 r^2 ,$$

oder

$$r^4 + 2 r^2 (b^2 - c^2) + b^4 - 4 z^2 b^2 = 0$$

zerfällt. Setzt man nun $c^2 = 2 b^2$, so zerfällt diese Kurve 4. Ordnung in zwei weitere Kreise

$$x^2 + (y \pm b)^2 = 2 b^2 ,$$

deren Mittelpunkte in $y = \pm b$ liegen und deren Radien den Wert $b\sqrt{2}$ haben (vergl. Abb. 6). Da die x-Achse Symmetrielinie ist, so ist damit auf direktem geometrischen Wege ein weiterer spezieller Fall der Strömung ermittelt, die von einer Ebene und einem von ihr abgeschnittenen Kreiszylinder begrenzt ist. Es bietet keine Schwierigkeit, die Ausdrücke für den Verlauf der Geschwindigkeit und des Druckes aufzustellen. So erhält man aus

$$\overline{v} = - u_0 + \frac{u_0 b^2}{z^2} + u_0 b^2 \left(\frac{1}{(z - i b)^2} + \frac{1}{(z + i b)^2} \right) ,$$

wenn man $z = b (i + \sqrt{2}\, e^{i\varphi})$ setzt, den zum Argument φ gehörigen Geschwindigkeitsverhältnis für die Kreispunkte

$$\frac{v}{u_0} = 2 \left(\sin \varphi + \frac{2\sqrt{2} + 3 \sin \varphi}{(3 + 2\sqrt{2} \sin \varphi)^2} \right) \quad . \quad . \quad (15).$$

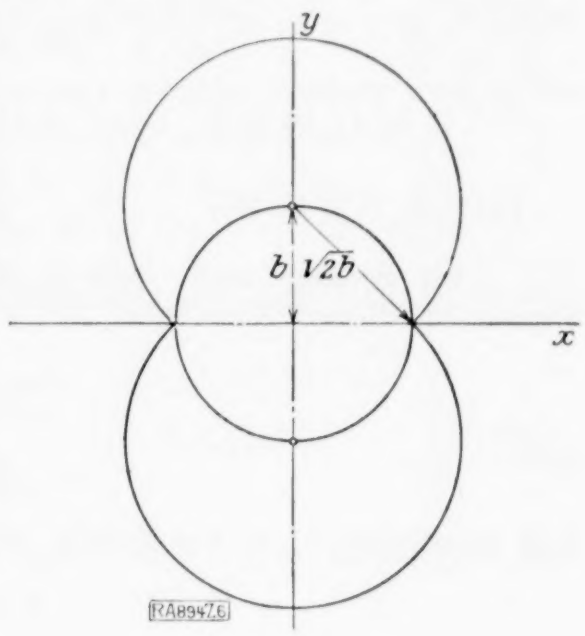


Abb. 6.

II. Unendliche Reihen von Doppelquellen.

6. Die genaue Ermittlung der Strömung um zwei Zylinder für a < b.

Wenn man von zwei gegebenen gleichen Kreiszylindern K_1 und K_2 mit den Radien a, die in den Parallelstrom gestellt sind, ausgeht, so sieht man, daß die bisherige Näherungslösung der Randwertaufgabe darauf hinauskommt, die im Unendlichen gelegene Doppelquelle an beiden Kreisen zu spiegeln. Jede gespiegelte, in einem Kreismittelpunkt, etwa A_1 gelegene Doppelquelle wird aber in der resultierenden Strömung die Kontur des anderen Zylinders stören. Um diesen Berandungsfehler wieder auszugleichen, muß man die zwei weiteren Doppelquellen A_1' und A_2' hinzufügen, die sich als Spiegelbilder der Doppelquellen A_1 und A_2 an den Kreisen K_1 und K_2 ergeben. Die vollständige Erfüllung der Randbedingung ist erst dann erreicht, wenn man die unendliche Reihe von Doppelquellen berücksichtigt, die durch fortgesetzte wechselseitige Spiegelung an beiden Kreisen auseinander abgeleitet werden können. Da nun das Spiegelbild einer im Abstande $R\,(> a)$ vom Mittelpunkt eines der Kreise gelegenen Doppelquelle den Abstand a^2/R vom Kreismittelpunkt erhält, während der Absolutwert ihres Momentes im Verhältnis a^2/R^2 sich verkleinert, so ergeben sich für Lage und Stärke der ersten Doppelquellen im Kreise I die Werte der nebenstehenden Tabelle, und man sieht, daß die bis ins Unendliche fortgesetzte Reihe den Gesetzen eines Kettenbruches [1]) genügt. Wenn man die Näherungswerte des Kettenbruches

	Stärke	Abstand von Mittelpunkt
0	m_0	0
1	$m_0 \frac{a^2}{4 b^2}$	$\frac{a^2}{2 b}$
2	$m_0 \frac{a^2}{4 b^2} \frac{a^2}{\left(2 b - \frac{a^2}{2 b}\right)^2}$	$\frac{a^2}{2 b - \frac{a^2}{2 b}}$

$$\cfrac{1}{\frac{2b}{a} - \cfrac{1}{\frac{2b}{a} - \cfrac{1}{\frac{2b}{a} - \cdots}}} = \cfrac{1}{\frac{2b}{a}} - \cfrac{1}{\frac{2b}{a}} - \cfrac{1}{\frac{2b}{a}} - \cdots$$

mit $q_1\, q_2 \ldots q_n$ bezeichnet, so haben wir für die Stärke und den Mittelpunktsabstand der n-ten induzierten Doppelquelle die Werte

$$m_n = m_0\, q_1^2\, q_2^2 \ldots q_n^2 , \qquad a\, q_n .$$

[1]) Vergl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig 1913.

Nehmen wir zunächst an, daß die Parallelströmung der Ebene beider Zylinderachsen parallel verläuft, so werden die Momente der Doppelquellen alternierende Vorzeichen erhalten, und es wird $m_n = (-1)^n q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2$.

Unter Zugrundelegung der oben benutzten Lage des Bezugssystems erhalten wir daher das Potential der Gesamtströmung

$$W_1 = -u_0 z - u_0 a^2 \left(\frac{1}{z-b} + \frac{1}{z+b}\right) + u_0 a^2 q_1^2 \left(\frac{1}{z-(b-a q_1)} + \frac{1}{z+(b-a q_1)}\right)$$
$$+ (-1)^{n+1} u_0 a^2 q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2 \left(\frac{1}{z-(b-a q_n)} + \frac{1}{z+(b-a q_n)}\right)$$
$$= -u_0 z - u_0 a^2 \left(\frac{1}{z-b} + \frac{1}{z+b}\right) + u_0 a^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2 \left(\frac{1}{z-(b-a q_n)} + \frac{1}{z+(b-a q_n)}\right).$$

Es gelingt nun, wie J. Bondera[1]) gezeigt hat, durch Einführung einer neuen Variabeln diesen Ausdruck in eine übersichtliche Form zu bringen. Setzt man nämlich

$$z = d\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\zeta}{2}, \qquad \zeta = \ln\frac{d+z}{d-z} \quad \dots\dots\dots \quad (16),$$

also

$$\frac{x}{d} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta}, \qquad \frac{y}{d} = \frac{\sin\eta}{\mathfrak{Cof}\,\xi + \cos\eta} \quad \dots\dots \quad (16\,a)$$

und eliminiert η, so beschreibt der Punkt z bei konstantem $\xi = \xi_0$ den Kreis

$$(x - d\,\mathfrak{Ctg}\,\xi_0)^2 + y^2 = \frac{d^2}{\mathfrak{Sin}^2\,\xi_0} \quad \dots\dots\dots \quad (17),$$

und wir haben, wie man sieht

$$d\,\mathfrak{Ctg}\,\xi_0 = \pm b, \qquad \frac{d}{\mathfrak{Sin}\,\xi_0} = a \quad \dots\dots\dots \quad (18),$$

also $d = \pm a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0$ zu setzen, damit die gegebenen Kreise in der durch (17) dargestellten Kreisschar enthalten sind.

Diese Substitution ist in der Tat möglich, da für $|\xi_0| \neq 0$

$$|\mathfrak{Cof}\,\xi_0| > 1, \quad \text{also} \quad |\mathfrak{Ctg}\,\xi_0| > \left|\frac{1}{\mathfrak{Sin}\,\xi_0}\right|$$

ausfällt. Für die Faktoren q erhalten wir ferner die einfachen Werte

$$q_1 = \frac{1}{2\,b/a} = \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}\,2\,\xi_0}, \qquad q_2 = \frac{\mathfrak{Sin}\,2\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}\,3\,\xi_0} \dots, \qquad q_n = \frac{\mathfrak{Sin}\,n\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}\,(n+1)\,\xi_0} \quad \dots \quad (19).$$

Daher wird der Grenzwert von q_n

$$q = \lim_{n\to\infty} q_n = \lim \frac{e^{n\xi_0} - e^{-n\xi_0}}{e^{(n+1)\xi_0} - e^{-(n+1)\xi_0}} = \frac{1}{e^{\xi_0}} \quad \dots\dots \quad (19\mathbf{a}).$$

Ferner erhalten wir für das Produkt der n ersten Faktoren q, wie man unmittelbar nachweist

$$q_1 q_2 \dots q_n = \frac{\mathfrak{Sin}\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}\,(n+1)\,\xi_0} \quad \dots\dots\dots \quad (20).$$

Um die Konvergenz der oben stehenden unendlichen Reihe für W_1 festzustellen, beachte man, daß

$$\varrho_{n+1} = \left|u_0 a^2 \frac{q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2}{z-(b-a q_n)}\right| = \frac{u_0 a^2\,\mathfrak{Sin}^2\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\,(n+1)\,\xi_0} \cdot \left|\frac{1}{z-(b-a q_n)}\right|$$

und

$$|z-(b-a q_n)| \geqq b - a q_n - b + a > d - b + a = a(1 - e^{-\xi_0}) > 0,$$

dann wird

$$\varrho_{n+1} \leqq \varrho'_{n+1} = \frac{u_0 a\,\mathfrak{Sin}^2\,\xi_0}{(1-e^{-\xi_0})\,\mathfrak{Sin}^2\,(n+1)\,\xi_0}$$

und folglich

$$\frac{\varrho'_{n+1}}{\varrho'_n} = \frac{\mathfrak{Sin}^2\,n\,\xi_0}{\mathfrak{Sin}^2\,(n+1)\,\xi_0} < \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\xi_0} < 1.$$

Wenn man nun die Werte (16), (18) und (19) benutzt, geht nach einer geringen Rechnung das Potential der Strömung über in

$$W(z) = W'(\zeta) = -u_0 a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0 \left\{\mathfrak{Tg}\,\frac{\zeta}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\zeta}{2}}{\mathfrak{Cof}^2\,(n+1)\,\xi_0 - \mathfrak{Tg}^2\,\frac{\zeta}{2}\,\mathfrak{Sin}^2\,(n+1)\,\xi_0}\right\} \quad (21).$$

---

[1]) Juljana Bondera, Ruch dwóch walców w cieczy doskonałej wraz z zastosowaniem do lotu w bliskósci ziemi (Odbitka ze sprawozdań i prac Warszawskiego Towarzystwa Politechnicznego, t. IV. 1. 1925) Warszawa 1925, S. 1 bis 80.

Nach einer weiteren Umformung des Summenausdrucks, die in der erwähnten Arbeit von Bondera[1]) ausführlich besprochen ist und hier nicht wiederholt werden soll, ergeben sich die Ausdrücke

$$W'(\zeta) = -u_0\, a\, \mathfrak{Sin}\,\xi_0 \left\{ \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2} + 2\,\mathfrak{Sin}\,\zeta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\mathfrak{Cof}\,\zeta + \mathfrak{Cof}\,2n\xi_0} \right\}$$

$$= -u_0\, a\, \mathfrak{Sin}\,\xi_0 \left\{ \mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\xi_0}+1}\,\mathfrak{Sin}\,n\zeta \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21\,\mathbf{a}),$$

die leicht in ihren reellen und imaginären Bestandteil zerlegt werden können (vergl. das Strombild Abb. 7). Daraus folgt dann die komplexe Strömungsgeschwindigkeit

$$\overline{v} = \frac{dW'}{d\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dz} = -u_0\left[1 - 4\,(1+\mathfrak{Cof}\,\zeta)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{e^{2n\xi_0}+1}\,\mathfrak{Cof}\,n\zeta\right] \quad . \quad . \quad (22).$$

Die auf einen Kreiszylinder ausgeübte Druckkraft läßt sich aus dem Blasiusschen, über den Kreisumfang erstreckte Integral berechnen:

$$\overline{P} = \frac{i\varrho}{2}\int_{\xi_0+0.i}^{\xi_0+2i\pi}\left(\frac{dW'}{d\zeta}\right)^2\frac{d\zeta}{dz}\,d\zeta = \frac{i\varrho}{2a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0}\int_{\xi_0+0.i}^{\xi_0+2i\pi}\left(\frac{dW'}{d\zeta}\right)^2(1+\mathfrak{Cof}\,\zeta)\,d\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (23).$$

Die etwas umständliche Auswertung führt schließlich zu folgendem Ausdruck für die entgegen der Strömung gerichtete Kraft

$$P_x = 8\,\pi\,\varrho\,u_0^2\,a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{e^{2n\xi_0}+1}\left[\frac{n}{e^{2n\xi_0}+1} - \frac{n+1}{e^{2(n+1)\xi_0}+1}\right] \quad . \quad . \quad (24).$$

Wenn $\frac{a}{b} = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi_0}$ einen kleinen, also ξ_0 einen großen Wert hat, so kann man sich auf das erste Glied der Reihe beschränken und erhält dann, da $\mathfrak{Sin}\,\xi_0$, $\mathfrak{Cof}\,\xi_0$ und $^1/_2\,e^{\xi_0}$ sich sich nur wenig voneinander unterscheiden, den bereits oben auf anderem Wege ermittelten Näherungswert für die Kraft

$$P_x \sim {}^1/_2\,\pi\,\varrho\,u_0^2\,a\,(a/b)^3.$$

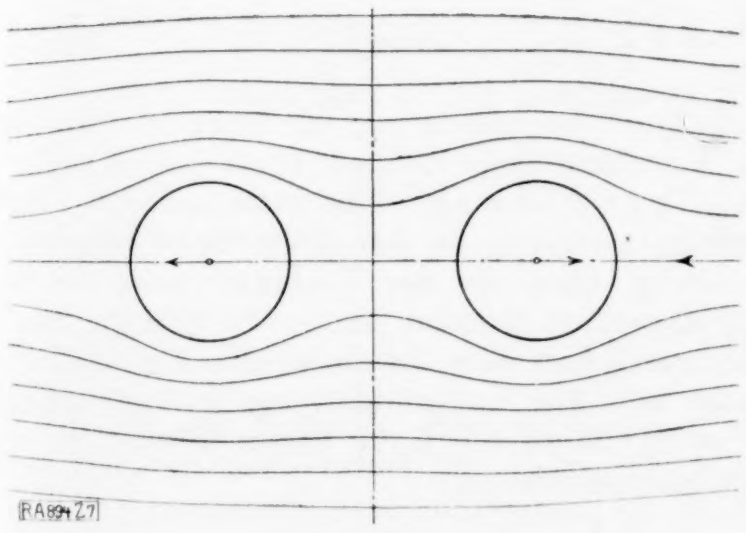


Abb. 7.

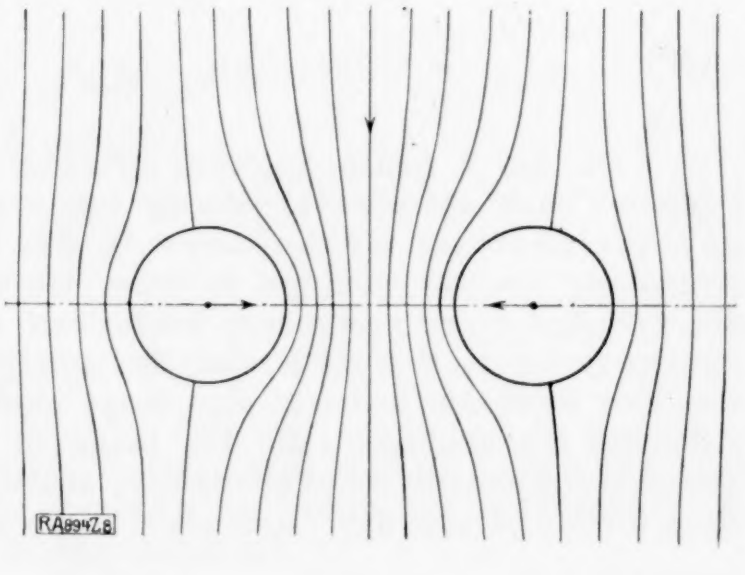


Abb. 8.

7. Die senkrecht und schief gegen die Zentrale beider Kreisquerschnitte gerichtete Strömung. Wenn die Parallelströmung die Richtung der negativen y-Richtung hat, also zur Verbindungslinie der Mitten beider Zylinderquerschnitte senkrecht steht, so bleibt der Weg zur Auffindung des Potentials im wesentlichen derselbe (vgl. Abb. 8). Bedenkt man, daß in diesem Falle alle Doppelquellen die gleiche Orientierung aufweisen, so erhält man zunächst in unentwickelter Form

$$W(z) = iv_0 z - iv_0 a^2\left(\frac{1}{z-b}+\frac{1}{z+b}\right) - i\,v_0\,a^2\sum_{n=1}^{\infty} q_1^2\,q_2^2\,..\,q_n^2\left[\frac{1}{z-(b-a\,q_n)}+\frac{1}{z+(b-a\,q_n)}\right] \quad (25).$$

[1]) a. a. O. S. 18 bis 25, 48.

Wenn man die Substitution (16) einführt, so ergibt sich nach entsprechender Umformung

$$W(z) = W'(\zeta) = i\,v_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\left\{\mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathfrak{Tg}\,\zeta/2}{\mathfrak{Cof}^2(n+1)\,\xi_0 - \mathfrak{Tg}^2\,\zeta/2\,\mathfrak{Sin}^2(n+1)\,\xi_0}\right\}$$

$$= i\,v_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\left\{\mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\xi_0}-1}\,\mathfrak{Sin}\,n\,\zeta\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25\,a)$$

und als Druckwirkung auf den Zylinder 1

$$P_x = -\,8\,\pi\,\varrho\,v_0^2\,a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{e^{2n\xi_0}-1}\left[\frac{n}{e^{2n\xi_0}-1} - \frac{n+1}{e^{2(n+1)\xi_0}-1}\right] \quad . \quad . \quad (26).$$

Die Kreiszylinder suchen sich also mit einer Kraft anzuziehen, die einem ähnlichen Gesetz folgt wie in dem Falle, daß die Strömung im Unendlichen der Hauptachse parallel ist. Vereinigen wir nun die Potentiale (21a) und (25a) und führen

$$u_0 = V\cos\alpha\,, \qquad v_0 = V\sin\alpha$$

ein, so gewinnen wir in

$$W = W_1'(\zeta) + W_2'(\zeta) = -\,V\,a\,\mathfrak{Sin}\,\xi_0\left\{\mathfrak{Tg}\frac{\zeta}{4}\,e^{-i\alpha} + 4\cos\alpha\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\xi_0}+1}\,\mathfrak{Sin}\,n\,\zeta\right.$$

$$\left. - 4\,i\sin\alpha\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\xi_0}-1}\,\mathfrak{Sin}\,n\,\zeta\right\} \quad (27).$$

Das Potential für die Strömung in der Umgebung zweier Kreiszylinder, die im Unendlichen mit der reellen Achse den Winkel α bilden[1]).

8. Zusammenhang mit dem Problem der Tragflügelströmung in Erdbodennähe. Dem Falle, daß die Spurpunkte der Kreiszylinder auf der y-Achse liegen, entspricht ein Potentialausdruck, der aus dem Ausdruck (27) dadurch hervorgeht, daß man z durch $-iz$, ζ durch $-i\zeta$, u_0 durch v_0 und v_0 durch $-u_0$ ersetzt. Statt des hyperbolischen Tangens hat man dann den trigonometrischen Tangens einzuführen, also zu setzen

$$z = d\,\mathrm{tg}\,\zeta/2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

So erhält man z. B. für die Horizontalströmung um die beiden Zylinder den Ausdruck

$$W(\zeta) = -\,u_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta_0\left[\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2} + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{\sin\zeta}{\cos\zeta + \mathfrak{Cof}\,2n\eta_0}\right]$$

$$= -\,u_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta_0\left[\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2} + 4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\eta_0}-1}\sin n\,\zeta\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Da die x-Achse zugleich Symmetrielinie und Stromlinie ist, so bezieht sich das Potential auch auf die Strömung um einen Kreiszylinder, der sich parallel zu der horizontalen Grenzebene in der Flüssigkeit bewegt, und man erkennt seine Bedeutung für das wichtige Problem der Tragflügelströmung in der Nähe des Erdbodens, die vermöge einer geeigneten konformen Abbildung, über die der Verfasser noch zu berichten gedenkt, aus der Kreiszylinderströmung abgeleitet werden kann. Es gelingt auch, wie hier nebenbei bemerkt sein mag, ohne Schwierigkeit dem Potential die Zirkulationsströmung hinzuzufügen, die für beide in bezug auf die Horizontalebene spiegelbildlich gelegenen Zylinder entgegengesetzt ausfallen muß, damit die Spur dieser Ebene Stromlinie bleibt. Denn der Ausdruck für die Zirkulationsströmung

$$-\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\ln\frac{-z+id}{z+id} = -\frac{i\,\Gamma}{2\pi}\ln\frac{1+i\frac{z}{d}}{1-i\frac{z}{d}} = \frac{\Gamma}{\pi}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z}{d}$$

verwandelt sich durch (28) in den einfachen Ausdruck

$$\frac{\Gamma}{2\pi}\,\zeta$$

und das Potential wird daher bei Vorhandensein einer Zirkulation

$$W(\zeta) = -\,u_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta_0\left\{\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2} - \frac{\Gamma}{2\pi\,u_0\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta_0}\,\zeta + 4\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\eta_0}-1}\sin n\,\zeta\right\} \quad . \quad (30).$$

[1]) Neuerdings hat M. Lagally eine noch allgemeinere und zugleich wesentlich elegantere Darstellung mittelst elliptischer Funktionen gegeben (vergl. diese Zeitschr. Bd. 8 (1928), S. 432).

Ueber den Einfluß der Zirkulation auf die Kraftwirkung ist in der zitierten Arbeit von Bondera das Nähere nachzulesen. Die Abb. 9, die dieser Arbeit entnommen ist, entspricht dem Falle, daß die von der Zirkulation hervorgerufene Auftriebskraft der vom Erdboden »induzierten« abwärts gerichteten Gegenkraft gerade das Gleichgewicht hält.

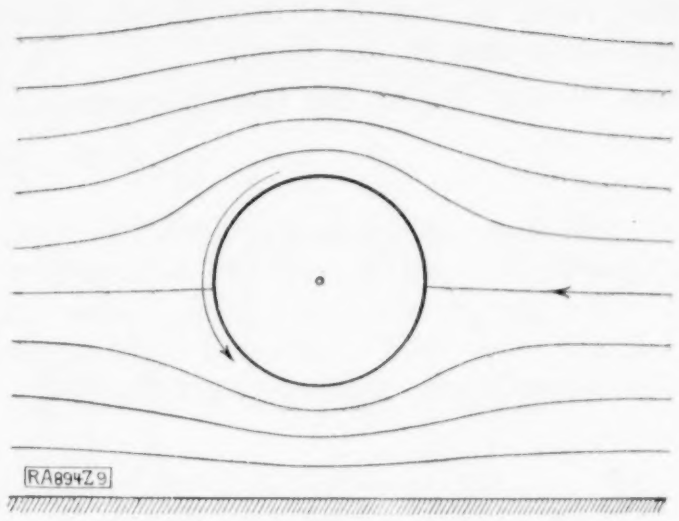


Abb. 9.

9. Strömung um zwei sich berührende Kreiszylinder $(a = b)$. Der Fall zweier sich berührender Kreiszylinder $(a = b, \xi_0 = O)$ ist mit den Formeln des letzten Abschnittes, d. h. mit der Substitution $z = b\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\zeta}{2}$, nicht mehr zu erfassen und findet in der erwähnten polnischen Arbeit keine Berücksichtigung. Es gelingt aber die Reihe der auf die einzelnen Doppelquellen sich beziehenden Ausdrücke in dem Potential W auf einem direkten Wege zu summieren. Da nämlich in diesem Falle mit $\frac{2b}{a} = 2$ die dem Kettenbruch

$$q = \frac{1}{\frac{2b}{a}} - \frac{1}{\frac{2b}{a}} - \dots$$

entsprechenden Brüche q_n die Werte annehmen

$$q_1 = \frac{1}{2}, \quad q_2 = \frac{2}{3}, \quad q_3 = \frac{3}{4} \dots q_n = \frac{n}{n+1}, \qquad \text{also}$$

$$q_1^2 = \frac{1}{4}, \quad q_1^2 q_2^2 = \frac{1}{9}, \quad \dots q_1^2 q_2^2 \dots q_n^2 = \frac{1}{(n+1)^2}; \quad b - a q_n = a(1 - q_n) = \frac{a}{n+1} \qquad (31)$$

wird, so erhält man für das Strömungspotential an erster Stelle den Ausdruck

$$W = -u_0 z - u_0 a^2 \left(\frac{1}{z+a} + \frac{1}{z-a}\right) + u_0 a^2 \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z+{}^1/_2 a} + \frac{1}{z-{}^1/_2 a}\right) - \dots$$

$$= -u_0 z - 2 u_0 a^2 z \left[\frac{1}{z^2-a^2} - \frac{1}{4z^2-a^2} + \frac{1}{9z^2-a^2} - \dots\right] = -u_0 z - 2 u_0 a^2 z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 z^2 - a^2} \qquad (32).$$

Setzt man nun in der bekannten Reihenformel [1])

$$\frac{\pi}{\sin \alpha \pi} = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha\left(\frac{1}{\alpha^2-1} - \frac{1}{\alpha^2-4} + \frac{1}{\alpha^2-9} - \dots\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (a)$$

$\alpha = \frac{a}{z}$, so kommt

$$\frac{\pi}{\sin \frac{a}{z}\pi} = \frac{z}{a} + 2az\left(\frac{1}{z^2-a^2} - \frac{1}{4z^2-a^2} + \dots\right) = \frac{z}{a} + 2az \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 z^2 - a^2}.$$

Da die Reihe (a) für alle Werte α, außer in den Punkten $\alpha = \pm 1, \pm 2$ usw. konvergiert, so konvergiert die Reihe (32) für alle Punkte z außerhalb der Grundkreise, und das entsprechende Strömungspotential ist durch den Ausdruck

$$W = -u_0 z - \frac{2 u_0 a^2 z}{2 a z}\left(\frac{\pi}{\sin \frac{a\pi}{z}} - \frac{z}{a}\right), \qquad W = -\frac{\pi u_0 a}{\sin \frac{a\pi}{z}} = -\frac{\pi u_0 a}{\sin \frac{a\pi(x - iy)}{r^2}} \qquad (33)$$

darstellbar. Entwickelt man den Ausdruck, so kommt

$$\left.\begin{aligned} W &= -\pi u_0 a \frac{\sin \frac{a\pi x}{r^2} \mathfrak{Cof} \frac{a\pi y}{r^2} + i \cos \frac{a\pi x}{r^2} \mathfrak{Sin} \frac{a\pi y}{r^2}}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{a\pi y}{r^2} - \cos^2 \frac{a\pi x}{r^2}} \\ \Phi &= -\pi u_0 a \frac{\sin \frac{a\pi x}{r^2} \mathfrak{Cof} \frac{a\pi y}{r^2}}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{a\pi y}{r^2} - \cos^2 \frac{a\pi x}{r^2}}; \qquad \Psi = -\pi u_0 a \frac{\cos \frac{a\pi x}{r^2} \mathfrak{Sin} \frac{a\pi y}{r^2}}{\mathfrak{Cof}^2 \frac{a\pi y}{r^2} - \cos^2 \frac{a\pi x}{r^2}} \end{aligned}\right\} \qquad (34).$$

[1]) Vergl. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin 1922, S. 200.

Man sieht in der Tat, daß dieses Potential die Grenzbedingungen erfüllt. Denn im Unendlichen hat W die Form $(W)_{z\to\infty} \equiv -u_0 z$ und $\Psi = 0$ ergibt die Gleichungen

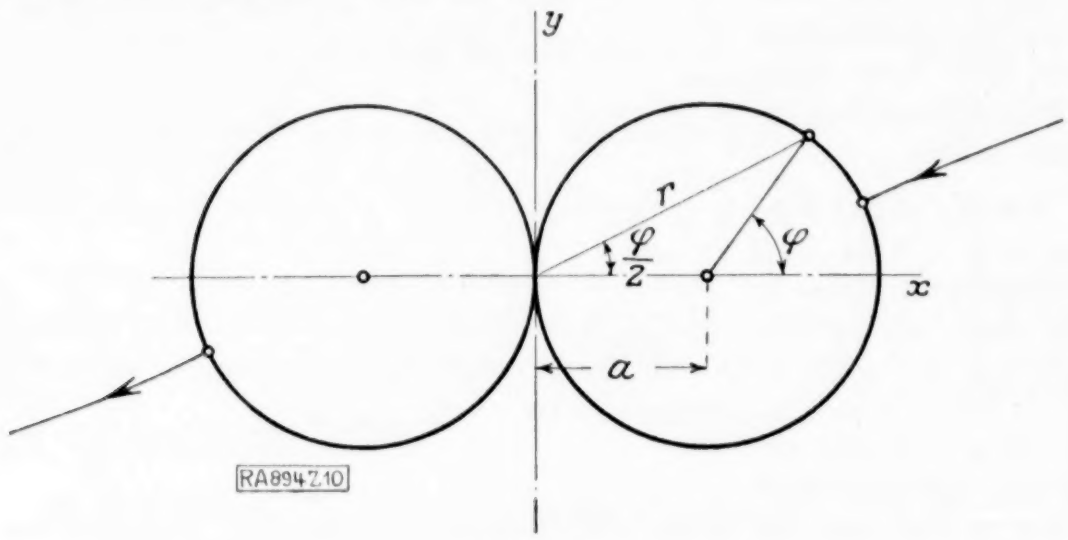


Abb. 10.

$$y = 0\,, \quad \frac{a\,\pi\,x}{r^2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

oder

$$y^2 + (x \pm a)^2 = a^2\,.$$

Da außerhalb der durch die letzte Gleichung dargestellten Kreise

$$|r^2| > |2\,x\,a|$$

wird, so fällt hier das Argument $\frac{a\,\pi\,x}{r^2}$ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ aus (vergl. Abbildung 10).

Um die durch Gleichung

$$\cos\frac{a\,\pi\,x}{r^2}\,\mathfrak{Sin}\frac{a\,\pi\,y}{r^2} = c\left(1 + \mathfrak{Sin}^2\frac{a\,\pi\,y}{r^2} - \cos^2\frac{a\,\pi\,x}{r^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

dargestellte Stromlinienschar zu konstruieren, kann man etwa

$$\cos\frac{a\,\pi\,x}{r^2} = X, \qquad \mathfrak{Sin}\frac{a\,\pi\,y}{r^2} = Y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

setzen. Die Schar wird dann in eine Schar von Hyperbeln

$$X\,Y = c\,(1 + Y^2 - X^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

transformiert, die die Punkte $X = \pm 1$ gemeinsam haben und deren Achse mit den Bezugsachsen, die der Realachse $y = 0$ und den Kreisen K_1 und K_2 entsprechen, einen Winkel α bilden, der durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\,\alpha = \frac{1}{2\,c}$$

bestimmt ist. Von den Hyperbeln ist allerdings wegen $\cos\frac{a\,\pi\,x}{r^2} \leqq 1$ nur das im Streifen $X = \pm 1$ gelegene Stück zu nehmen. Aus den Punkten einer Hyperbel ergeben sich dann nach (36) die Polarkoordinaten der entsprechenden Stromlinie

$$r^2 = \frac{a^2\,\pi^2}{(\operatorname{arc}\cos X)^2 + (\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,Y)^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Sin}\,Y}{\operatorname{arc}\cos X} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Geschwindigkeit und Druckverlauf. Für die komplexe Strömungsgeschwindigkeit erhalten wir den Wert

$$\bar{v} = -\frac{u_0\,a^2\,\pi^2}{z^2}\cdot\frac{\cos\dfrac{a\,\pi}{z}}{\sin^2\dfrac{a\,\pi}{z}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39).$$

Längs eines Kreises K_1 wird mit $z = a\,(1 + e^{i\,\varphi})$

$$\left.\begin{aligned}\bar{v} &= -\frac{u_0\,\pi^2}{(1+e^{i\,\varphi})^2}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{1+e^{i\,\varphi}}}{\sin^2\dfrac{\pi}{1+e^{i\,\varphi}}} = -\frac{u_0\,\pi^2}{(1+e^{i\,\varphi})^2}\cdot\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - i\,\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} - i\,\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}\\ &= -\frac{u_0\,\pi^2\,i}{(1+e^{i\,\varphi})^2}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)} = -\frac{i\,u_0\,\pi^2\,e^{-i\,\varphi}}{4\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (40),$$

also für den absoluten Wert der Geschwindigkeit

$$v = \frac{u_0\,\pi^2}{4\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)}{\mathfrak{Cof}^2\left(\dfrac{\pi}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40\,\mathbf{a}).$$

Der Ausdruck erscheint für $\varphi = \pi$, $\operatorname{tg} \varphi/2 = \infty$ in unbestimmter Form. Da für unendlich große Argumente $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ identisch werden, so hat man

$$v_{\varphi=\pi} = \left(\frac{u_0 \pi^2}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \mathfrak{Cof}\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right)} \right)_{\varphi=\pi}$$

und man zeigt unschwer nach den Methoden der Differentialrechnung, daß der Nenner unendlich, also der Berührungspunkt beider Kreise K Staupunkt der Strömung wird. Im übrigen ergibt sich die Verteilung der Geschwindigkeiten aus der nebenstehenden Tabelle. Für das Maximum der Geschwindigkeit erhält man durch Differenzierung der Bestimmungsgleichung

φ	v/u_0
0	0
30^0	1,06
45^0	1,4
60^0	1,65
90^0	1,8
150^0	0,21

$$\pi \, \mathfrak{Tg}^2 \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) - \sin \varphi \, \mathfrak{Tg} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (41),$$

die etwa durch den Wert $\varphi = 1{,}4$ erfüllt wird, der einem Winkel von 83^0 entspricht.

10. Die vertikale und schief gerichtete Strömung um die Zylinder. Wenn die Parallelströmung im Unendlichen die Richtung der negativen y-Achse hat, so haben wir für das Strömungspotential die Reihe

$$W_2 = i v_0 z - 2 i v_0 z a^2 \left(\frac{1}{z^2 - a^2} + \frac{1}{4 z^2 - a^2} + \frac{1}{9 z^2 - a^2} + \ldots \right) \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Benutzen wir die aus der Funktionentheorie bekannte Reihe

$$\operatorname{ctg} \alpha \pi = \frac{1}{\alpha \pi} + 2 \frac{\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

und setzen wieder $\alpha = a/z$, so wird

$$\frac{1}{z^2 - a^2} + \frac{1}{4 z^2 - a^2} + \ldots = \frac{1}{2 a^2} - \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{a \pi}{z}}{2 a z}$$

und das Potential W_2, das wieder an allen Stellen außerhalb der Grundkreise konvergent ist, nimmt die einfache Form an

$$W_2 = i \pi a v_0 \operatorname{ctg} \frac{a \pi}{z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

und gibt mit $x^2 + y^2 = r^2$ folgende Entwicklung

$$W_2 = i \pi a v_0 \frac{\sin \frac{2 a \pi x}{r^2} + i \, \mathfrak{Sin} \frac{2 a \pi y}{r^2}}{\mathfrak{Cof} \frac{2 a \pi y}{r^2} - \cos \frac{2 a \pi x}{r^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Wenn man die Stromfunktion

$$\Psi_2 = \pi a v_0 \frac{\sin \frac{2 a \pi x}{r^2}}{\mathfrak{Cof} \frac{2 a \pi y}{r^2} - \cos \frac{2 a \pi x}{r^2}}$$

gleich Null setzt, so sieht man, daß in der Tat die y-Achse und die beiden Kreise

$$\frac{2 a \pi x}{r^2} = \pm \pi, \qquad x^2 + y^2 = \pm 2 a x$$

zum System der Stromlinien gehören. Man hat dadurch gleichzeitig die durch eine Ebene und einen auf ihr ruhenden Kreiszylinder begrenzte Strömung gefunden. Die Konstruktion geschieht wieder am besten durch Vermittlung der Substitution

$$\sin \frac{2 a \pi x}{r^2} = X, \qquad \mathfrak{Cof} \frac{2 a \pi y}{r^2} = Y.$$

Die schief gerichtete Strömung gegen die beiden Kreiszylinder wird durch das Potential

$$W = W_1 + W_2 = - \pi a \left(\frac{u_0}{\sin \frac{a \pi}{z}} - i v_0 \operatorname{ctg} \frac{a \pi}{z} \right) = - \pi a V \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \frac{a \pi}{z}} - i \sin \alpha \operatorname{ctg} \frac{a \pi}{z} \right) \quad (44)$$

dargestellt[1]). Die Verteilung der Geschwindigkeiten auf dem Kreise I ergibt sich wie oben aus der allgemeinen Geschwindigkeitsfunktion

$$v = -\frac{\pi^2 a^2 V}{z^2}\left(\cos\alpha\,\frac{\cos\frac{a\pi}{z}}{\sin^2\frac{a\pi}{z}} - \sin\alpha\,\frac{1}{\sin^2\frac{a\pi}{z}}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

zu

$$\frac{v}{V} = \frac{\pi^2}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}\cdot\frac{\cos\alpha\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) - \sin\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\left(\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Die Argumente der Staupunkte (die sog. Stauwinkel) genügen z. B. der Gleichung

$$\mathfrak{Sin}\frac{a\pi y}{r^2} = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Sin}\left(\frac{1}{2}\pi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tg}\alpha\,,$$

woraus sich dann folgende Zuordnung zwischen der Stromrichtung α und dem Stauwinkel φ_0 ergibt

α	0	30^0	45^0	60^0	90^0
φ_0	0	$38^0\,40'$	$58^0\,20'$	$79^0\,40'$	180^0

Zur Ermittlung der beiden Komponenten der auf einen Zylinder entfallenden Druckkraft haben wir die beiden Integrale

$$P_x = -a\int_0^{2\pi} p\cos\varphi\,d\varphi = -a\varrho\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)\cos\varphi\,d\varphi\,,$$

$$P_y = -a\int_0^{2\pi} p\sin\varphi\,d\varphi = -a\varrho\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)\sin\varphi\,d\varphi$$

zu berechnen. Man führt mit $\frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \tau$ also $d\varphi = \frac{4}{\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,d\tau$ die Integrationsvariable τ ein, so zerlegen sich die Integrale in zwei Teile

$$J = \int_0^{\infty} f(\tau)\,d\tau + \int_{-\infty}^{0} f(\tau)\,d\tau\,,$$

deren Grenzen den Werten $\tau = 0$ und $= \infty$ resp. $\tau = -\infty$ und 0 entsprechen, und man sieht, daß die ungeraden Ausdrücke in $J(\tau)$ zum Gesamtintegral keinen Beitrag liefern, während für die geraden Ausdrücke beide Teilintegrale gleich ausfallen. Wir erhalten also mit Einsetzung des Wertes (46)

$$P_x = \frac{a\pi^3}{2}\int_0^{\infty}\frac{\cos^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left(\frac{\cos^2\alpha\,\mathfrak{Sin}^2\tau}{\mathfrak{Cof}^4\tau}+\frac{\sin^2\alpha}{\mathfrak{Cof}^4\tau}\right)d\tau = \frac{1}{2}a\pi^3\int_0^{\infty}\left(1-\frac{4\tau^2}{\pi^2}\right)\left(\frac{\cos^2\alpha}{\mathfrak{Cof}^2\tau}-\frac{\cos 2\alpha}{\mathfrak{Cof}^4\tau}\right)d\tau\,,$$

$$P_y = -\frac{1}{2}a\pi^3\int_0^{\infty}\sin 2\alpha\,\frac{\mathfrak{Sin}\tau\cdot\tau\,d\tau}{\mathfrak{Cof}^4\tau}\,.$$

Benutzt man die Integrale[2])

$$\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}\tau} = \Big[\operatorname{arctg}(e^{\tau})\Big]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}^2\tau} = \Big[\mathfrak{Tg}\,\tau\Big]_0^{\infty} = 1\,,$$

$$\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}^3\tau} = \Big[\frac{1}{2}\,\frac{\mathfrak{Sin}\tau}{\mathfrak{Cof}^2\tau}\Big]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}\tau} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}^4\tau} = \Big[\frac{\mathfrak{Sin}\tau}{3\,\mathfrak{Cof}^3\tau}\Big]_0^{\infty} + \frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}^2\tau} = \frac{2}{3}\,,$$

[1]) Ueber die Verallgemeinerung und funktionentheoretische Begründung dieser Darstellung. Vergl. Wilh. Müller, Zur hydrodyn. Deutung der ellipt. Funktionen, Z. a. M. M. Bd. 8 (1928), S. 447 bis 451.

[2]) Vergl. etwa S. Günther, Lehre von den Hyperbelfunktionen, 1881, S. 170 f.

$$\int_0^\infty \frac{\tau^2\,d\tau}{\mathfrak{Cof}^2\,\tau} = \frac{\pi^2}{12}, \qquad \int_0^\infty \frac{\tau^2\,d\tau}{\mathfrak{Cof}^4\,\tau} = \left[\frac{\tau^2\,\mathfrak{Sin}\,\tau}{3\,\mathfrak{Cof}^3\,\tau} + \frac{1}{3}\,\frac{\tau}{\mathfrak{Cof}^2\,\tau} - \frac{1}{3}\,\mathfrak{Tg}\,\tau\right]_0^\infty + \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{\tau^2\,d\tau}{\mathfrak{Cof}^2\,\tau} = \frac{\pi^2}{18} - \frac{1}{3},$$

$$\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathfrak{Sin}\,\tau\,d\tau}{\mathfrak{Cof}^4\,\tau} = \left[-\frac{1}{3}\,\frac{\tau}{\mathfrak{Cof}^3\,\tau}\right]_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{d\tau}{\mathfrak{Cof}^3\,\tau} = \frac{\pi}{12},$$

so ergeben sich nach einer kleinen Rechnung die Komponenten der Druckkraft

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{9}\,\varrho\,a\,\pi^3\,(1+\sin^2\alpha) - \frac{2}{3}\,\varrho\,a\,\pi\cos 2\,\alpha = \frac{1}{18}\,\varrho\,a\,\pi\,[3\,\pi^2 - (\pi^2+12)\cos 2\,\alpha] \\ P_y &= -\frac{1}{24}\,\varrho\,a\,\pi^4 \sin 2\,\alpha \end{aligned}\right\} \quad (47).$$

Für $\alpha = 0$, $\pi/4$ und $\pi/2$ haben wir

α	P_x	P_z
0	$\frac{1}{9}\,\pi\,\varrho\,(\pi^2-6)$	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{6}\,\varrho\,\pi^3$	$-\frac{1}{24}\,\varrho\,\pi^4$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{9}\,\pi\,\varrho\,(\pi^2+3)$	0

Die größte Kraftwirkung in der x-Richtung tritt auf, wenn die Strömung senkrecht zur Zentralen der Zylinderquerschnitte gerichtet ist, die größte Kraftwirkung in der y-Richtung, wenn die Anstromrichtung mit dieser Zentralen einen Winkel von 45° bildet.

Schließlich läßt sich auch in diesem Falle der translatorischen Strömung eine Drehströmung überlagern, die dann am einfachsten zu bestimmen ist, wenn beide Zylinder entgegengesetzt gleiche Zirkulation tragen. Da zwei Berührungswirbel gleichbedeutend sind mit einer senkrecht zu ihrer Verbindung orientierten Doppelquelle, so haben wir für das Gesamtpotential den Ausdruck

$$W = -\pi\,a\,V\left(\cos\alpha\cdot\sin^{-1}\frac{a\,\pi}{z} - i\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{a\,\pi}{z}\right) - \frac{i\,m}{2\,\pi\,z}.$$

Er entspricht etwa der Relativströmung zweier in einer Flüssigkeit bewegter und gleichzeitig auf einander sich abwälzender Kreiszylinder.

Ist z. B. $\alpha = \pi/2$, so erhält man eine um beide Achsen symmetrische Potentialströmung, die sich durch ein beide Kreise umschließendes Oval in zwei Teile zerlegt, in die Strömung der Berührungswirbel zwischen den Kreisen und dem Oval und die reguläre Strömung außerhalb des Ovals. 894

Zum Problem der Hauptschubspannungslinien in plastischen Stoffen.

Von **FRANK LÖBELL** in Stuttgart-Cannstatt.

In einer größeren Arbeit hat kürzlich Hr. W. Jenne[1]) frühere Untersuchungen verschiedener Autoren über Hauptschubspannungslinien in plastischen Körpern zusammengefaßt und erweitert. Unter anderem gibt er eine allgemeingültige Gleichgewichtsbedingung, die er unter der Annahme der Konstanz der absolut größten Schubspannung auf verschiedene Sonderfälle anwendet, deren gemeinsames Merkmal ist, daß sich die Hauptschubspannungslinien in Flächenscharen anordnen. Unter der weiteren Voraussetzung, daß alle Hauptschubspannungen konstant sind, gelangt er in diesen Spezialfällen zu rein geometrischen Beziehungen, die gewisse Systeme orthogonaler Kurven auf den erwähnten Flächen auszeichnen.

Im folgenden wird die von Jenne als Ausgangspunkt benutzte Gleichgewichtsbedingung ebenfalls, jedoch in etwas anderer, und zwar zunächst weniger einfach

[1]) W. Jenne, Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation. Diese Zeitschr. Bd. 8 (1828), S. 18 bis 44.

erscheinender Form gebraucht **(I)**; dies bietet aber den Vorteil, daß der Uebergang zu allen früher behandelten und einigen weiteren Sonderfällen mit beträchtlich geringerer Mühe vollzogen werden kann **(III)**. Einen entscheidenden Anteil an dieser Vereinfachung der Rechnung trägt allerdings die Verwendung der Grundgedanken der kinematischen Differentialgeometrie; diese müssen deshalb, wenn auch in möglichster Kürze, vorher auseinandergesetzt werden **(II)**. Die zu rein geometrischen Relationen führende Elimination der unbekannten, veränderlichen Spannungsgrößen wird im folgenden ganz allgemein durchgeführt **(IV)** und liefert drei skalare Beziehungen, der die Hauptschubspannungslinien genügen müssen, also in jedem der früher betrachteten Spezialfälle außer der bis jetzt bekannten Gleichung noch zwei weitere; durch diese wird unter den durch die bisher allein benutzte Bedingung charakterisierten Kurvensystemen im allgemeinen eine engere Auswahl getroffen, wie am Beispiel der Schar von Kreiszylindern mit gemeinsamer Achse näher dargelegt wird **(V)**.

I. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung.

1. Zerlegung der Aenderung eines symmetrischen Tensors. Es sei das Feld eines symmetrischen Tensors gegeben; Φ und $\Phi + \Delta\Phi$ seien die Werte des Tensors in den beiden Punkten P und $P + \Delta P$. Ω bezeichne den Tensor der Drehung, die die Hauptachsenrichtungen von Φ in die von $\Phi + \Delta\Phi$ überführt. $\mathfrak{q}$ bedeute einen beliebigen, im Raume festen Vektor. Wenn Φ und $\Phi + \Delta\Phi$ in den Hauptachsenlängen übereinstimmen, so erhält man denselben Vektor,

a) wenn man den Vektor $(\Phi + \Delta\Phi)\,\mathfrak{q}$ in dieselbe Lage bezüglich der Hauptachsen von Φ bringt, die er bezüglich der Hauptachsen von $\Phi + \Delta\Phi$ hat, oder

b) wenn man den Tensor Φ auf den Vektor ausübt, der bezüglich der Hauptachsen von Φ dieselbe Lage hat wie $\mathfrak{q}$ bezüglich der Hauptachsen von $\Phi + \Delta\Phi$.

Man erhält aber

$$\text{im Falle a)}\quad \Omega^{-1}(\Phi + \Delta\Phi)\,\mathfrak{q}\,, \qquad \text{im Falle b)}\quad \Phi\,(\Omega^{-1}\mathfrak{q})\,.$$

Unterscheiden sich aber Φ und $\Phi + \Delta\Phi$ auch in ihren Hauptachsenlängen, so muß man, um denselben Vektor wie im Fall a) zu erhalten, zu dem im Fall b) gefundenen Vektor noch den Vektor $\Delta'\Phi\,(\Omega^{-1}\mathfrak{q})$ hinzufügen, wo $\Phi + \Delta'\Phi$ den Tensor bezeichne, der mit Φ in den Hauptachsenrichtungen und mit $\Phi + \Delta\Phi$ in den Hauptachsenlängen übereinstimmt. Hiernach gilt also allgemein:

$$\Omega^{-1}(\Phi + \Delta\Phi)\,\mathfrak{q} = (\Phi + \Delta'\Phi)\,(\Omega^{-1}\mathfrak{q}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1).$$

Es möge nun ΔP in der Weise gegen Null streben, daß $\frac{\Delta P}{\Delta s} = \frac{\Delta P}{|\Delta P|}$ einen Grenzwert $\frac{dP}{ds} = \mathfrak{t}$ besitzt; es wird dann

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Omega^{-1} - 1}{\Delta s}\,\mathfrak{q} = -\,\mathfrak{u} \times \mathfrak{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2),$$

wo $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit des Hauptachsendreibeins von Φ bei einer Bewegung von P mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{t}$ ist. Aus (1) und (2) ergibt sich durch eine kleine Umrechnung [1]):

$$\frac{d\Phi}{ds}\,\mathfrak{q} = \frac{d'\Phi}{ds}\,\mathfrak{q} + \mathfrak{u} \times (\Phi\,\mathfrak{q}) - \Phi\,(\mathfrak{u} \times \mathfrak{q}) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3);$$

hier bedeutet $\frac{d'\Phi}{ds}$ die Aenderungsgeschwindigkeit von Φ bei unveränderlich gedachten Hauptachsenrichtungen.

2. Derivierte eines Tensors unter Zugrundelegung allgemeiner Bezugsrichtungen. Des weiteren seien in jedem Punkte P drei zueinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ gegeben, die als Bezugsrichtungen gelten sollen; das Dreibein $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3$ sei rechtshändig. Die Differentiation in der Richtung $\mathfrak{t}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ werde mit $\frac{\partial}{\partial s_i}$ bezeichnet, überhaupt mögen alle auf die Kurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_i$ bezüglichen Größen mit dem Zeiger i versehen werden. Dann ist bekanntlich

$$\nabla\,\Phi = \sum_1^3{}^{i}\,\mathfrak{t}_i \frac{\partial\,\Phi}{\partial\,s_i} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

---

[1]) Vergl. Jenne, l. c. S 25 ff. Die hier gegebene Formel gilt für eine beliebige Differentiationsrichtung.

Nach (3) ist also [1])

$$\nabla \Phi = \sum_1^3 \left(t_i \frac{\partial' \Phi}{\partial s_i} + u_i \times (\Phi t_i) - \Phi (u_i \times t_i) \right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

3. Gleichgewichtsbedingung bei Zugrundelegung besonderer Bezugsrichtungen. Die Richtungen t_i, die bis jetzt beliebig angenommen werden konnten, mögen von nun an spezialisiert werden: t_1 und t_2 seien die Medianenrichtungen zweier Hauptachsenrichtungen

$$t_I = \frac{t_1 - t_2}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad t_{II} = \frac{t_1 + t_2}{\sqrt{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

von Φ; t_3 ist demnach die dritte Hauptachsenrichtung. Φ bedeute einen Spannungstensor; σ_1, σ_2, σ_3 seien die Hauptspannungen, so daß also

$$\tau_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

die Hauptschubspannungen sind. Es wird dann

$$\Phi = \sigma_1 t_I \cdot t_I + \sigma_2 t_{II} \cdot t_{II} + \sigma_3 t_3 \cdot t_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

also wegen (6) und (7)

$$\Phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} (t_1 \cdot t_1 + t_2 \cdot t_2) + \tau_3 (t_1 \cdot t_2 + t_2 \cdot t_1) + \sigma_3 t_3 \cdot t_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9),$$

folglich

$$\Phi t_1 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t_1 + \tau_3 t_2, \quad \Phi t_2 = \tau_3 t_1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t_2, \quad \Phi t_3 = \sigma_3 t_3 \quad . \quad . \quad (10).$$

Nun ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht der Spannungen, wenn keine Volumkräfte wirken:

$$\nabla \Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Mit Hilfe von (5) und (10) geht (11) über in

$$\begin{aligned}
&{}^1/_2 \frac{\partial (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial s_1} t_1 + \frac{\partial \tau_3}{\partial s_1} t_2 + {}^1/_2 \frac{\partial (\sigma_1 + \sigma_2)}{\partial s_2} t_2 + \frac{\partial \tau_3}{\partial s_2} t_1 + \frac{\partial \sigma_3}{\partial s_3} t_3 \\
&+ \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} u_1 \times t_1 + \tau_3 u_1 \times t_2 + \tau_3 u_2 \times t_1 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} u_2 \times t_2 + \sigma_3 u_3 \times t_3 \\
&- \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} (t_2 \cdot t_2 u_1 t_1 + t_1 \cdot t_1 u_2 t_2 + t_1 \cdot t_1 u_3 t_3 + t_2 \cdot t_2 u_3 t_3) \\
&- \tau_3 (t_1 \cdot t_2 u_1 t_1 + t_2 \cdot t_1 u_2 t_2 + t_1 \cdot t_2 u_3 t_3 + t_2 \cdot t_1 u_3 t_3) \\
&- \sigma_3 (t_3 \cdot t_3 u_1 t_1 + t_3 \cdot t_3 u_2 t_2) = 0.
\end{aligned}$$

Es ist aber

$$t_2 u_1 t_1 = u_1 t_1 t_2 = u_1 t_3 ;$$

entsprechend sind die anderen Produkte $t_k u_i t_l$ umzuformen. Ferner ist

$$u_1 \times t_1 = u_1 \times (t_2 \times t_3) = t_2 \cdot u_1 t_3 - t_3 \cdot u_1 t_2 ;$$

nach diesem Muster können alle Produkte $u_i \times t_k$ umgewandelt werden. Man erhält somit, wenn man beachtet, daß $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 = \tau_2 - \tau_1$ ist, und wenn man schon jetzt die Annahme

$$\underline{2 \tau_3 = \sigma_2 - \sigma_1 = \text{konst.}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

einführt [2]):

$$\begin{aligned}
&{}^1/_2 \nabla (\sigma_1 + \sigma_2) + (\tau_1 - \tau_2) (t_1 \cdot u_3 t_2 - t_2 \cdot u_3 t_1 + t_3 [u_1 t_2 - u_2 t_1]) \\
&+ \tau_3 (t_1 [u_3 t_1 - 2 u_1 t_3] - t_2 [u_3 t_2 - 2 u_2 t_3] + t_3 [u_1 t_1 - u_2 t_2]) + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} t_3 = 0 \quad (13).
\end{aligned}$$

II. Exkurs über die Grundbegriffe der kinematischen Differentialgeometrie.

Die Beziehung (13) kann ohne weiteres auf Spezialfälle angewandt werden, wenn man die einfachsten Begriffe der kinematischen Differentialgeometrie [3]) benutzt; diese mögen deshalb hier in aller Kürze auseinandergesetzt werden:

---

[1]) Jenne, l. c. S. 27, Formel (24).

[2]) Die Formel (13) ist zwar weniger einfach als die entsprechenden Formeln bei Jenne [l. c. S. 28, Gl. (26)], die sich auf die Hauptspannungsrichtungen beziehen, sie kann aber ohne später notwendig werdende Aenderungen der Bezugsrichtungen spezialisiert werden. (13) enthält $u_3 t_3$ nicht; hierauf weist schon Jenne bei einer Besprechung seiner Gl. (25) (l. c. S. 28) hin.

[3]) Siehe Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung (Leipzig 1928), S. 60 bis 98. (Es ist zu beachten, daß hier G_2 mit anderem Vorzeichen verwendet wird als bei Lagally.) Vergl. auch die hierauf bezüglichen Bemerkungen von Jenne, l. c., S. 36.

4. Bänder und Kurven. Wir denken uns eine Raumkurve und in jedem ihrer Punkte P eine bestimmte Berührebene E; ein solches Gebilde nennen wir ein Band (man stellt sich am besten nur ein kleines, P enthaltendes Stück von E vor). Der Einheitsvektor der Tangente sei $\mathfrak{t}$, der der Ebenennormalen $\mathfrak{n}$ (wir wollen voraussetzen, daß $\mathfrak{n}$ eine stetige Funktion von P sei). Ferner sei $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$. Bewegen wir das Dreibein $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ mit dem Scheitel P so an der Kurve entlang, daß P die Geschwindigkeit $\mathfrak{t}$ hat, so gibt es in jedem Kurvenpunkt eine Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{d}$ dieser Bewegung. Wir nennen $\mathfrak{d}$ den Krümmungsvektor des Bandes; die Komponenten von $\mathfrak{d}$ in den Richtungen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ bezeichnen wir als die Krümmungen des Bandes. Für jeden mit dem Dreibein $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ starr verbundenen Vektor $\mathfrak{q}$ — also insbesondere für die Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{t}$ selbst — gilt [vergl. (2)]:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14).$$

Zwei Bänder, die dieselbe Raumkurve als ihre gemeinsame »Achse« haben, besitzen in jedem Punkt P Krümmungsvektoren, die nur um einen Vektor von der Richtung $\mathfrak{t}$ verschieden sind, weil die Bewegungen ihrer Dreibeine $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$ sich nur durch Drehungen um $\mathfrak{t}$ unterscheiden. Wählen wir als Vektor $\mathfrak{n}$ die Normale $\mathfrak{h}$ der alle in P möglichen Vektoren $\mathfrak{d}$ enthaltenden Tangentialebene — $\mathfrak{d}$ hat, wie leicht bewiesen werden kann, dann und nur dann selbst die Richtung $\mathfrak{t}$, wenn die Raumkurve eine Gerade ist, und dies wollen wir hier ausschließen —, so wird nach dem oben Gesagten der Krümmungsvektor linear abhängig von $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \times \mathfrak{h}$ [1]), also

$$\mathfrak{d} = k\,\mathfrak{b} + w\,\mathfrak{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Wir nennen ihn den Krümmungsvektor der Kurve schlechtweg; k heißt ihre Krümmung, w ihre Windung.

5. Flächen. Wir denken uns eine Fläche im Raum; $\mathfrak{n}$ sei der Einheitsvektor ihrer Normalen im Flächenpunkt P. Auf der Fläche werde eine Kurve gezogen; ihre Tangente sei $\mathfrak{t}$. $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ heißt die Tangentialnormale [2]) der Flächenkurve Den Krümmungsvektor $\mathfrak{d}$ des Bandes, das die Kurve mit den Berührebenen der Fläche in den Kurvenpunkten bildet, nennen wir den Krümmungsvektor der Flächenkurve schlechthin. Wir können ihn in der Form schreiben

$$\mathfrak{d} = G\,\mathfrak{n} + N\,\mathfrak{f} + T\,\mathfrak{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

G heißt die geodätische Krümmung, N die Normalkrümmung, T die geodätische Windung der Flächenkurve in P.

Haben wir zwei Scharen orthogonaler Flächenkurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$, also den Tangentialnormalen $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{t}_2$, $\mathfrak{f}_2 = -\mathfrak{t}_1$ [3]), so bestehen (wie hier nicht bewiesen werden soll) zwischen ihren Krümmungsgrößen G_1, N_1, T_1 und G_2, N_2, T_2 in einem Flächenpunkte P die grundlegenden Beziehungen:

$$\text{a)} \quad T_1 + T_2 = 0 \quad \text{(Satz von Bonnet)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17),$$

$$\text{b)} \quad \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{\partial}{\partial s_1} + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{\partial}{\partial s_2} = 0 \quad \text{(die Integrabilitätsbedingung)} \quad (18);$$

diese Operatorgleichung darf auf jede (skalare, Vektor- oder Tensor-) Funktion des Ortes auf der Fläche angewandt werden.

$$\text{c)} \quad \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\mathfrak{d}_1 + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\mathfrak{d}_2 - \mathfrak{d}_1 \times \mathfrak{d}_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

[Gleichung von Gauß, Codazzi und Mainardi [4])].

---

[1]) Das Dreikant mit dem Scheitel P, dessen Kanten die Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{b}$ haben, wird das begleitende Dreikant der Raumkurve genannt. Für $\mathfrak{q} = \mathfrak{t}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ liefert (14) die Frenetschen Formeln.

[2]) S. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie (Leipzig und Berlin 1913), S. 53. Das Dreibein $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{n}$ mit dem Scheitel P kann man das »charakteristische Dreikant« der Flächenkurve nennen; s. Cesàro-Kowalewski, Vorlesungen über natürliche Geometrie (Leipzig und Berlin 1926), S. 195.

[3]) Setzt man in (14) $\mathfrak{q} = \mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{n}$ und $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2$, so erhält man die »Ableitungsgleichungen« von Gauß und Rodrigues-Weingarten.

[4]) Die Zusammenfassung der drei skalaren Gleichungen von Gauß und Codazzi-Mainardi in eine Gleichung findet sich zum ersten Mal wohl bei Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca (Napoli 1896), S. 250 bis 253.

III. Verschiedene Spezialisierungen der Gleichgewichtsbedingung.

Nach dem im Abschn. **4** Gesagten können allgemein die Vektoren $\mathfrak{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ als Krümmungen von Bändern gedeutet werden; dies kann dadurch Bedeutung erlangen, daß, wie man beweisen kann, ein Band bis auf seine Lage im Raum eindeutig bestimmt ist, wenn seine drei Krümmungen als Funktionen der Bogenlänge gegeben sind.

Es soll aber hier gleich zu speziellen Anwendungen geschritten werden:

6. Die Hauptschubspannungslinien ordnen sich auf Flächen an. Wenn die Kurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_3$ eine Schar von Orthogonalflächen besitzen, so kann man auf jeder dieser Flächen die Kurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ als Koordinatenlinien verwenden, und es wird (vergl. Abschn. **5**): $\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{d}_2$, also, wenn $T_1 = -T_2 = T_0$ gesetzt wird: $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{t}_1 = T_0$, $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{t}_2 = N_1$, $\mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_1 = -N_2$, $\mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_2 = -T_0$, $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{t}_3 = G_1$, $\mathfrak{u}_2 \mathfrak{t}_3 = G_2$; die Gleichgewichtsbedingung (13) nimmt also die Form an:

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_2 \nabla (\sigma_1 + \sigma_2) + (\tau_1 - \tau_2)(\mathfrak{t}_1 \cdot \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - \mathfrak{t}_2 \cdot \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_3 (N_1 + N_2)) \\ + \tau_3 (\mathfrak{t}_1 (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 - 2 G_1) - \mathfrak{t}_2 (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - 2 G_2) + 2 \mathfrak{t}_3 T_0) + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \mathfrak{t}_3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Ebenso leicht könnte man den Fall behandeln, daß etwa die Kurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_2$ und $\mathfrak{t}_3$ auf Flächen angeordnet sind.

7. Die Flächen, die die Hauptschubspannungslinien tragen, sind Parallelflächen. Bilden die Kurven mit den Tangenten $\mathfrak{t}_3$ eine Normalenkongruenz, so hat $\mathfrak{u}_3$ stets die Richtung $\mathfrak{t}_3$, so daß $\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 = \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 = 0$ ist; aus (20) ergibt sich dann[1]):

$${}^1/_2 \nabla (\sigma_1 + \sigma_2) + (\tau_1 - \tau_2)(N_1 + N_2)\mathfrak{t}_3 - 2\tau_3 (G_1 \mathfrak{t}_1 - G_2 \mathfrak{t}_2 - T_0 \mathfrak{t}_3) + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \mathfrak{t}_3 = 0 \quad (21).$$

8. Die Flächen, auf denen sich die Hauptschubspannungskurven anordnen, sind koaxiale Drehflächen. Sind $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{t}''$ die Tangentenvektoren der Parallelkreise und der Meridiankurven, und ist r der Abstand des Punktes P von der gemeinsamen Drehachse mit der Richtung $\mathfrak{e}$ $(\mathfrak{e}^2 = 1)$, φ die geographische Breite, ϱ der Krümmungsradius des Meridians in P, so ist, da $\mathfrak{d}' = \mathfrak{e}/r$ ist, $G' = \frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{n}}{r} = \frac{\sin\varphi}{r}$, $N' = \frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{t}''}{r} = \frac{\cos\varphi}{r}$, ferner, da $\mathfrak{d}'' = -\frac{\mathfrak{t}'}{\varrho}$ ist, $G'' = 0$, $N'' = 1/\varrho$ und $T' = T'' = 0$; bezeichnet ϑ den Winkel von $\mathfrak{t}_1$ mit $\mathfrak{t}'$, so gilt weiter nach einem Satze von Liouville[2])

$$G_1 = \frac{\sin\varphi \cos\vartheta}{r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}, \quad G_2 = -\frac{\sin\varphi \sin\vartheta}{r} + \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$$

und nach einem Satze von Bonnet[3]) $T_0 = (N' - N'') \cos\vartheta \sin\vartheta = \left(\frac{\cos\varphi}{r} - \frac{1}{\varrho}\right) \cos\vartheta \sin\vartheta$.

Schließlich ist $\mathfrak{u}_3 = -\frac{\mathfrak{t}'}{\varrho} + \omega \mathfrak{t}_3$, wo ϱ den Krümmungsradius der durch P gehenden Orthogonaltrajektorie der Meridiankurven in P und ω einen unbestimmten Skalar bedeutet. Folglich nimmt die Gl. (20) im vorliegenden Fall die Form an:

---

[1]) Man kann leicht die Uebereinstimmung mit den Gleichungen (64) und (65) und der letzten der Gleichungen (61) bei Jenne (l. c. S. 38) erkennen; dabei ist zu beachten, daß $N_1 = \frac{1}{R_1}$, $N_2 = \frac{1}{R_2}$ ist. Bemerkenswert ist, daß nicht von vornherein $\mathfrak{u}_3 = 0$ angenommen werden muß (s. Anm. 2, S. 215).

[2]) Dieser Satz lautet: Die geodätische Krümmung G einer Kurve (mit der Bogenlänge s), die in jedem ihrer Punkte P mit der Bezugsrichtung $\mathfrak{t}_1$ in P den Winkel ϑ bildet, ist

$$G = G_1 \cos\vartheta + G_2 \sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{ds};$$

dies ergibt sich ohne jede Rechnung als Anwendung des Satzes von der Zusammensetzung der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{d}_1 \cos\vartheta$, $\mathfrak{d}_2 \sin\vartheta$ und $\mathfrak{n}\frac{d\vartheta}{ds}$, deren Summe $\mathfrak{d}$ ist.

[3]) Hier müssen N' und N'' die Hauptkrümmungen, d. h. die Normalkrümmungen für die Richtungen $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{t}''$, für die $T = 0$ ist, sein; auch diese Beziehung findet man unmittelbar durch Addition der Winkelgeschwindigkeiten.

$$\left.\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\nabla(\sigma_1+\sigma_2)+(\tau_1-\tau_2)\Big[\mathfrak{t}_1\cdot\frac{\sin\vartheta}{\varrho}+\mathfrak{t}_2\cdot\frac{\cos\vartheta}{\varrho}+\mathfrak{t}_3\left(\frac{\cos\varphi}{r}+\frac{1}{\varrho}\right)\Big]+\frac{\partial(\tau_1-\tau_2)}{\partial s_3}\mathfrak{t}_3\\ &\quad+\tau_3\Big[\mathfrak{t}_1\left(-\frac{\cos\vartheta}{\varrho}-2\,\frac{\sin\varphi\cos\vartheta}{r}-2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}\right)\\ &\quad-\mathfrak{t}_2\left(\frac{\sin\vartheta}{\varrho}+2\,\frac{\sin\varphi\sin\vartheta}{r}-2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\right)+2\,\mathfrak{t}_3\left(\frac{\cos\varphi}{r}-\frac{1}{\varrho}\right)\cos\vartheta\sin\vartheta\Big)\Big]=0\end{aligned}\right\}\quad(22).$$

Sind die Drehflächen zudem Parallelflächen, so vereinfacht sich (22) dadurch, daß $\frac{1}{\varrho}=0$ wird.

9. Die Flächen, die die Hauptschubspannungslinien tragen, sind Ebenen. a) In diesem Falle hat man $N_1+N_2=0$ und $T_0=0$. Es liegt am nächsten, die Ebenen als Berührebenen einer Raumkurve C anzusehen, die man, wenn die Ebenenschar gegeben wäre, durch Differentiationen erhalten könnte; C darf auch in einen Punkt, sogar in einen unendlich fernen, ausarten. Dann ist $\mathfrak{u}_3=\mathfrak{c}\cdot\frac{ds}{ds_3}+\nu\,\mathfrak{t}_3$, wo, wenn C kein Punkt ist, $\mathfrak{c}$ den Krümmungsvektor und s den Bogen von C, ν aber einen unbestimmten Skalar bedeutet; für $\frac{ds}{ds_3}$ kann man, wie eine einfache Ueberlegung lehrt, auch $\frac{1}{w\,n}$ setzen, wo w die Windung von C und n den nach der Seite der positiven Hauptnormalen $\mathfrak{h}$ positiv gemessenen Abstand des Punktes P von der Tangente $\mathfrak{t}$ von C bedeutet. Da wegen $\mathfrak{t}_3=\mathfrak{b}$ $\mathfrak{c}=k\,\mathfrak{t}_3+w\,\mathfrak{t}$ ist, so erhält man, wenn man noch den Winkel ϑ zwischen $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{t}_1$ einführt, $\mathfrak{u}_3\,\mathfrak{t}_1=\frac{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_1}{n}=-\frac{\sin\vartheta}{n}$, $\mathfrak{u}_3\,\mathfrak{t}_2=\frac{\mathfrak{t}\,\mathfrak{t}_2}{n}=-\frac{\cos\vartheta}{n}$, folglich nach (20) [1]):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\nabla(\sigma_1+\sigma_2)+(\tau_1-\tau_2)\frac{1}{n}(-\mathfrak{t}_1\cos\vartheta+\mathfrak{t}_2\sin\vartheta)\\ &\quad+\tau_3\left[\frac{1}{n}(-\mathfrak{t}_1\sin\vartheta+\mathfrak{t}_2\cos\vartheta)-2\,G_1\,\mathfrak{t}_1+2\,G_2\,\mathfrak{t}_2\right]+\frac{\partial(\tau_1-\tau_2)}{\partial s_3}\mathfrak{t}_3=0\quad(23).\end{aligned}$$

b) Man kann die Ebenen auch als Normalebenen einer ihrer Orthogonaltrajektorien $\bar{C}$ ansehen [2]). Man überzeugt sich sofort, daß dann die Gl. (23) gültig bleibt, da C und $\bar{C}$ parallele Hauptnormalen besitzen; n bedeutet in diesem Fall den Abstand von der Polarachse.

In der Beziehung (23) darf $G_1=\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}$ und $G_2=\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}$ gesetzt werden; dies folgt unmittelbar aus der Definition der geodätischen Krümmung (Abschnitt **5**).

10. Der rotationssymmetrische Fall. Sind die Hauptschubspannungslinien in Ebenen angeordnet, die durch eine feste Gerade g gehen, so erhält man die Gleichgewichtsbedingung am schnellsten aus (20), wenn man wieder

$$N_1+N_2=0\,,\qquad T_0=0\qquad\text{und diesmal}\qquad \mathfrak{u}_3=\mathfrak{e}/n+\omega\,\mathfrak{t}_3$$

setzt, wo $\mathfrak{e}$ einen Einheitsvektor mit der Richtung von g und n den Abstand des Punktes P von g bezeichnet; ist ϑ der Winkel von $\mathfrak{t}_2$ gegen $\mathfrak{e}$, so wird [3])

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\nabla(\sigma_1+\sigma_2)+(\tau_1-\tau_2)\frac{1}{n}(\mathfrak{t}_1\cos\vartheta-\mathfrak{t}_2\sin\vartheta)\\ &\quad+\tau_3\left[\frac{1}{n}(\mathfrak{t}_1\sin\vartheta-\mathfrak{t}_2\cos\vartheta)-2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}\mathfrak{t}_1+2\,\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\mathfrak{t}_2\right]+\frac{\partial(\tau_1-\tau_2)}{\partial s_3}\mathfrak{t}_3=0\quad(24).\end{aligned}$$

Man erkennt, daß diese Beziehung auch noch gilt, wenn die Ebenen einen beliebigen Zylinder mit der Erzeugendenrichtung $\mathfrak{e}$ berühren; nur bedeutet dann n die Entfernung des Punktes P von der Berührungslinie.

[1]) Diese Gleichung faßt die Gleichungen (39) und die dritte der Gleichungen (35) bei Jenne (l. c. S. 31 f.) zusammen; für die Gültigkeit dieser Gleichungen ist somit die Annahme, daß $\mathfrak{u}_3$ die Richtung von $\mathfrak{e}$ habe, unwesentlich (vergl. Anm. 2 auf S. 215).

[2]) Wie Jenne es tut, l. c. S. 29 ff.

[3]) Dies sind die Gl. (46) bei Jenne (l. c. S. 35) und die Gl. (10) in der Arbeit von Hencky, Ueber einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern, diese Zeitschr., Bd. 3 (1923), S. 247. Man braucht, wie man sieht, nicht von Anfang an $\omega=o$ anzunehmen (s. Anm. 2 auf S. 215). — Würde der Winkel von $\mathfrak{t}_2$ gegen $-\mathfrak{e}$ mit ϑ bezeichnet, so würde (24) mit (23) identisch.

11. Der ebene Fall. Ordnen sich die Hauptschubspannungslinien in parallelen Ebenen an, so hat man in (20) $N_1 + N_2 = 0$, $T_0 = 0$ und zudem $u_3 = \omega t_3$ zu setzen; man bekommt so [1]):

$$\frac{1}{2} \nabla (\sigma_1 + \sigma_2) - 2 \tau_3 \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} t_1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} t_2 \right) + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} t_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (25).$$

Die Scharen der Hauptschubspannungskurven in verschiedenen Ebenen brauchen hiernach nicht von Anfang an als kongruent und parallel angenommen zu werden.

IV. Uebergang von der Gleichgewichtsbedingung zu rein geometrischen Beziehungen.

12. Elimination der veränderlichen Spannungsgrößen. Rein geometrische Beziehungen für die Hauptschubspannungslinien erhält man durch Elimination der Spannungsgrößen, soweit sie unbekannt sind, aus der Gl. (13); zunächst gelingt dies leicht bei der Größe $\sigma_1 + \sigma_2$. Denn bekanntlich ist dafür, daß ein Vektorfeld das Gradientenfeld einer skalaren Ortsfunktion ist, notwendig und hinreichend, daß sein Rotor identisch verschwindet; demnach bekommt man unmittelbar aus (13):

$$\nabla \times \Big\{ t_1 [(\tau_1 - \tau_2) u_3 t_2 + \tau_3 (u_3 t_1 - 2 u_1 t_3)] - t_2 [(\tau_1 - \tau_2) u_3 t_1 + \tau_3 (u_3 t_2 - 2 u_2 t_3)] + t_3 \left[(\tau_1 - \tau_2)(u_1 t_2 - u_2 t_1) + \tau_3 (u_1 t_1 - u_2 t_2) + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \right] \Big\} = 0 \; . \quad (26).$$

Macht man die Annahme, daß alle Hauptschubspannungen konstant seien, fügt man also zu der Forderung (12) noch die folgende hinzu [2]):

$$2 \tau_1 = \sigma_3 - \sigma_2 = \text{konst.}, \qquad 2 \tau_2 = \sigma_1 - \sigma_3 = \text{konst.} \; . \quad . \quad . \quad . \quad (27),$$

so ist der Inhalt der Gl. (26) rein geometrisch, da sie dann überhaupt keine unbekannten, veränderlichen Spannungsgrößen mehr enthält.

Bezeichnet man die Koeffizienten von t_1, t_2, t_3 in der hinter dem Operator $\nabla \times$ in (26) stehenden geschweiften Klammer mit u_1, u_2, u_3, so wird aus (26)

$$\sum_1^3{}_{i,k} \left(t_i \frac{\partial}{\partial s_i} \right) \times (u_k t_k) = \sum_1^3{}_{i,k} t_i \times \frac{\partial (u_k t_k)}{\partial s_i} = 0 \; .$$

Nun ist (vergl. (2) und (14)): $t_i \times \frac{\partial (u_k t_k)}{\partial s_i} = t_i \times \left(t_k \frac{\partial u_k}{\partial s_i} + u_k u_i \times t_k \right) = t_i \times t_k \frac{\partial u_k}{\partial s_i} + u_k (u_i \cdot t_i t_k - t_k \cdot u_i t_i)$; mithin geht (26) über in:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial u_1}{\partial s_3} t_2 - \frac{\partial u_1}{\partial s_2} t_3 + u_1 (u_1 - t_1 (u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3)) \\ + & \frac{\partial u_2}{\partial s_1} t_3 - \frac{\partial u_2}{\partial s_3} t_1 + u_2 (u_2 - t_2 (u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3)) \\ + & \frac{\partial u_3}{\partial s_2} t_1 - \frac{\partial u_3}{\partial s_1} t_2 + u_3 (u_3 - t_3 (u_1 t_1 + u_2 t_2 + u_3 t_3)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Die Einführung der Ausdrücke für u_1, u_2, u_3 würde zu einer sehr verwickelten Beziehung für die Komponenten von u_1, u_2, u_3 führen.

V. Anwendungen auf besondere Fälle.

13. Die Hauptschubspannungslinien ordnen sich auf Flächen an. Alle in früheren Arbeiten behandelten Spezialfälle haben das gemein, daß die Hauptschubspannungslinien als auf einer Flächenschar angeordnet angenommen werden. Wird jetzt wieder diese Voraussetzung gemacht, so ergibt sich aus (28), wenn $t_3 = n$ und $u_3 t_3 = \omega$ gesetzt wird (vergl. auch Abschn. **6**):

$$\left. \begin{aligned} & t_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial s_2} - \frac{\partial u_2}{\partial s_3} \right) + t_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial s_3} - \frac{\partial u_3}{\partial s_1} \right) + n \left(\frac{\partial u_2}{\partial s_1} - \frac{\partial u_1}{\partial s_2} \right) + u_1 [(T_0 - \omega) t_1 + N_1 t_2 + G_1 n] \\ & + u_2 (- N_2 t_1 - (T_0 + \omega) t_2 + G_2 n) + u_3 (t_1 \cdot u_3 t_1 + t_2 \cdot u_3 t_2) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (29).$$

---

[1]) Vergl. Jenne, l. c. S. 28f., und Hencky, l. c. S. 244. ($1/n = 0$ führt (24) in (25) über.)

[2]) Bekanntlich ist die Gl. (12) eine Folge der beiden Gl. (27); vergl. Jenne, l. c. S. 19, Gl. (5). Setzt man die Gültigkeit von (27) voraus, so wird $\nabla \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \nabla \sigma_1 = \nabla \sigma_2 = \nabla \sigma_3 = - \nabla p$, wo $p = - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ ist (Jenne, l. c. S. 31). Im folgenden soll immer ausdrücklich gesagt werden, welche der beiden Annahmen (12) oder (27) zugrundegelegt wird.

Skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ liefert[1]):

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right) u_1 + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) u_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - \frac{\partial u_2}{\partial s_3} + u_1 (T_0 - \omega) - u_2 N_2 + u_3 \cdot \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial s_3} - \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + u_1 N_1 - u_2 (T_0 + \omega) + u_3 \cdot \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} u_1 = \quad & (\tau_1 - \tau_2)\, \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 + \tau_3 (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 - 2 G_1) \\ u_2 = - & (\tau_1 - \tau_2)\, \mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_1 - \tau_3 (\mathfrak{u}_3 \mathfrak{t}_2 - 2 G_2) \\ u_3 = \quad & (\tau_1 - \tau_2)(N_1 + N_2) + 2 \tau_3 T_0 + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

14. Die Parallelflächenschar. Wenn die Hauptschubspannungslinien auf einer Schar von Parallelflächen liegen (wie in Abschn. **7**), so wird $\mathfrak{u}_3 \times \mathfrak{n} = 0$, also, wenn $N_1 + N_2 = 2H$[2]) gesetzt wird:

$$u_1 = - 2 \tau_3 G_1, \quad u_2 = 2 \tau_3 G_2, \quad u_3 = 2 (\tau_1 - \tau_2) H + 2 \tau_3 T_0 + \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3}.$$

Die Gleichung (30) ergibt dann (da $\tau_3 \neq 0$ ist):

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right) G_1 - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) G_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Nun gilt aber auch die Beziehung[3]):

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right) G_1 + \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right) G_2 + K = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34),$$

wo $K = N_1 N_2 - T_0{}^2$[4]) ist; hieraus folgt[5]):

$$G_1{}^2 - \frac{\partial G_1}{\partial s_2} = - \frac{1}{2} K, \qquad G_2{}^2 + \frac{\partial G_2}{\partial s_1} = - \frac{1}{2} K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Die Gl. (31) liefern dazu noch:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2 \tau_3} \frac{\partial u_3}{\partial s_2} - \frac{\partial G_2}{\partial s_3} - G_1 (T_0 - \omega) - G_2 N_2 = 0 \\ \frac{1}{2 \tau_3} \frac{\partial u_3}{\partial s_1} + \frac{\partial G_1}{\partial s_3} + G_2 (T_0 + \omega) + G_1 N_1 = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36).$$

Die hier auftretenden Ableitungen von G_1 und G_2 in der Richtung $\mathfrak{n}$ lassen sich aber noch auf andere Weise ausdrücken; dies zeige die folgende

Zwischenbetrachtung aus der Flächentheorie:

Denken wir uns in einer Fläche F der Parallelflächenschar ein System von Hauptschubspannungskurven gegeben, so ist, wenn ω bekannt ist, dadurch auch das System der Hauptschubspannungskurven in einer Nachbarfläche bestimmt; es muß demnach möglich sein, die Aenderungen der Krümmungsgrößen dieser Kurven beim Fortschreiten in der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ anzugeben. Dazu bedienen wir uns des Operators[6])

$$\nabla_f = \mathfrak{t}_1 \frac{\partial}{\partial s_1} + \mathfrak{t}_2 \frac{\partial}{\partial s_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37);$$

---

[1]) Die Gl. (30) besagt (vergl. Abschn. **5**), daß u_1 und u_2 die partiellen Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial p}{\partial s_2}$ einer Ortsfunktion p auf der Fläche sind; dies bildet bei Jenne den Ausgangspunkt für die Gewinnung der dieser entsprechenden Gleichung.

[2]) H ist die »mittlere Krümmung« der Fläche in P.

[3]) Dies ist das »theorema egregium« von Gauß; es ergibt sich aus (19) (Abschn. **5**) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{n}$.

[4]) K ist das Gaußsche »Krümmungsmaß« der Fläche in P.

[5]) Dies sind, wovon man sich leicht überzeugt, die Gl. (70) und (71) bei Jenne, l. c. S. 39; man beachte, daß sie auch ohne die Voraussetzung (27) und auch dann, wenn $\mathfrak{u}_3 \neq 0$ ist, gelten.

[6]) $(\nabla_f \varphi)^2$ ist Beltramis erster Differentialparameter, $\nabla_f \varphi \, \nabla_f \psi$ der gemischte Differentialparameter, $\nabla_f \nabla_f \varphi = \nabla_f{}^2 \varphi$ der zweite Differentialparameter; vergl. R. Rothe, Anwendungen der Vektoranalysis auf Differentialgeometrie, Jahresber. d. D. Math.-Verein., Bd. 21 (1912), S. 249 ff.

Zusatz bei der Korrektur: Nachträglich wurde bemerkt, daß der Operator ∇_f auch von Weatherburn (Differential geometry of three dimensions, Cambridge 1927, S. 220 ff.) eingeführt worden ist; die ältere Behandlung der Differentialoperatoren durch R. Rothe war umfassender.

er ist ersichtlich invariant gegenüber jeder Aenderung der Bezugsrichtungen auf der Fläche, bei der diese orthogonal bleiben [1]). Wir wählen vorübergehend die Hauptkrümmungsrichtungen $\mathfrak{t}'$ und $\mathfrak{t}''$ (die durch $T' = T'' = 0$ charakterisiert [2]) sind) als Bezugsrichtungen, weil sie auf allen Parallelflächen in Punkten, die auf derselben Normalen liegen, gleich sind; bezeichnen wir nämlich alle Größen, die sich auf die Fläche $\bar{F}$ beziehen, die von F den konstanten Abstand a in der positiven Normalenrichtung hat, durch Ueberstreichen, so finden wir zunächst für das Kurvensystem auf $\bar{F}$, das die Tangentenrichtungen $\mathfrak{t}'$ der einen Schar von Krümmungslinien auf F hat, wegen der starren Verbundenheit der beiden charakteristischen Dreikante in P und $\bar{P}$ den Krümmungsvektor

$$\bar{\mathfrak{d}}' = \frac{d\,s'}{d\,\bar{s}'}\,\mathfrak{d}', \qquad \text{so daß} \qquad \bar{T}' = 0\,, \text{ also nach (17) auch } \bar{T}'' = 0 \text{ folgt.}$$

Da $\bar{P}$ den Ortsvektor $\bar{\mathfrak{r}} = \mathfrak{r} + a\,\mathfrak{n}$ besitzt, so ist weiter [siehe (14)]

$$\bar{\mathfrak{t}}' = \frac{\partial\,(\mathfrak{r} + a\,\mathfrak{n})}{\partial\,\bar{s}'} = \frac{d\,s'}{d\,\bar{s}'}\,(\mathfrak{t}' + a\,\mathfrak{d}' \times \mathfrak{n}) = \frac{d\,s'}{d\,\bar{s}'}\,(1 + a\,N')\,\mathfrak{t}'\,,$$

folglich (wegen $\bar{\mathfrak{t}}' = \mathfrak{t}'$) $\dfrac{d\,s'}{d\,\bar{s}'} = \dfrac{1}{1 + a\,N'}$ und ebenso $\dfrac{d\,s''}{d\,\bar{s}''} = \dfrac{1}{1 + a\,N''}$. Hieraus fließt aber

$$\bar{\nabla}_f = \frac{\mathfrak{t}'\dfrac{\partial}{\partial\,s'}}{1 + a\,N'} + \frac{\mathfrak{t}''\dfrac{\partial}{\partial\,s''}}{1 + a\,N''} = \frac{\nabla_f + a\left(N''\,\mathfrak{t}'\dfrac{\partial}{\partial\,s'} + N'\,\mathfrak{t}''\dfrac{\partial}{\partial\,s''}\right)}{1 + 2\,a\,H + a^2\,K}\,.$$

Es ist hier vorteilhaft, eine besondere Bezeichnung für die Tangentialkomponente des Flächenkrümmungsvektors $\mathfrak{d}$

$$\mathfrak{g} = T\,\mathfrak{t} + N\,\mathfrak{f} \quad (= \mathfrak{n} \times \mathfrak{d} \times \mathfrak{n}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

zu benutzen, da, wie hier ohne eingehenden Beweis aus der Flächentheorie übernommen werden muß [3]), $\mathfrak{g}$ sich bei Aenderung der Bezugsrichtungen wie das Symbol d/ds transformiert [4]); da $N'\,\mathfrak{t}'' = \mathfrak{g}'$ und $N''\,\mathfrak{t}' = -\,\mathfrak{g}''$ ist, so können wir somit wegen der unmittelbar erkennbaren Invarianz des Ausdrucks $\mathfrak{g}_1\dfrac{\partial}{\partial\,s_2} - \mathfrak{g}_2\dfrac{\partial}{\partial\,s_1}$ ohne weiteres schreiben:

$$\bar{\nabla}_f = \frac{\nabla_f + a\left(\mathfrak{g}_1\dfrac{\partial}{\partial\,s_2} - \mathfrak{g}_2\dfrac{\partial}{\partial\,s_1}\right)}{1 + 2\,a\,H + a^2\,K} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

oder für unendlich kleines $a = \delta\,n$, wenn wir alle auf die Richtung $\mathfrak{t}$ bezüglichen Größen ohne Index und die auf die Richtung $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{f}$ bezüglichen mit einem Sternchen * bezeichnen:

$$\delta\,\nabla_f = \delta\,n \cdot \left[(T\mathfrak{t} - N^*\mathfrak{t}^*)\frac{\partial}{\partial\,s^*} + (T\,\mathfrak{t}^* - N\,\mathfrak{t})\frac{\partial}{\partial\,s}\right] = \delta\,n \cdot \mathfrak{n} \times \left(\mathfrak{g}\frac{\partial}{\partial\,s} + \mathfrak{g}^*\frac{\partial}{\partial\,s^*}\right) \quad (40).$$

---

[1]) Man hat, falls man diese Behauptung nachprüfen will, nur zu beachten, daß $\dfrac{d}{d\,s} = \cos\varphi\dfrac{\partial}{\partial\,s_1} + \sin\varphi\dfrac{\partial}{\partial\,s_2}$ ist, wenn die Differentiation $\dfrac{d}{d\,s}$ in der Richtung $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1\cos\varphi + \mathfrak{t}_2\sin\varphi$ erfolgt. Eine gegen jede Aenderung der Koordinatenlinien invariante Schreibweise wäre $\nabla_f = \left(\mathfrak{f}_1\dfrac{\partial}{\partial\,s_2} - \mathfrak{f}_2\dfrac{\partial}{\partial\,s_1}\right) : \sin\gamma$, wo γ den Winkel zwischen den Bezugsrichtungen bedeutet.

[2]) Durch diese Bedingung werden die Hauptkrümmungsrichtungen zweckmäßig definiert (vergl. Anm. 3 auf S. 217); in Uebereinstimmung mit der gewöhnlichen Erklärung ergibt sich, daß dann $\dfrac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial\,s'} = \mathfrak{d}' \times \mathfrak{n}$ die Richtung $\mathfrak{t}'$ hat. Analog wird eine Haupttangentenrichtung durch die Bedingung $N = 0$ erklärt.

[3]) Es sei hier nur soviel gesagt: Die Aussage, daß der zu der Richtung $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1\cos\varphi + \mathfrak{t}_2\sin\varphi$ gehörige »geodätische Krümmungsvektor« $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1\cos\varphi + \mathfrak{g}_2\sin\varphi$ ist, folgt unmittelbar aus den Beziehungen $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times \dfrac{d\,\mathfrak{n}}{d\,s}$ und $\dfrac{d\,\mathfrak{n}}{d\,s} = \dfrac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial_{s_1}}\cos f + \dfrac{\partial\,\mathfrak{n}}{\partial_{s_2}}\sin\varphi$; $\mathfrak{g}$ läßt sich mit Hilfe eines gewissen (in dieser Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 467, Fußnote, angegebenen) symmetrischen Tensors aus $\mathfrak{f}$ herleiten. — $\mathfrak{g}$ ist die momentane Winkelgeschwindigkeit eines längs der Flächenkurve im Sinne von Levi-Cività »parallel verschobenen« Körpers bei Zugrundelegung der Bogenlänge als Zeitskala; $\mathfrak{g} \times \mathfrak{q}$ ist also die Aenderungsgeschwindigkeit des in diesem Sinne in der Richtung $\mathfrak{t}$ »parallel verschobenen« Vektors $\mathfrak{q}$, der gewöhnlich als Vektor in der Tangentialebene angenommen wird.

[4]) Vergl. Anm. 1 auf dieser Seite.

Um mit Hilfe dieser Formel die Aenderung der geodätischen Krümmung G berechnen zu können, gehen wir davon aus, daß

$$G = - \nabla_f \mathfrak{t}^* \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

ist [1]). Beim Uebergang von F zu einer Nachbarfläche $\overline{F}$ im Abstande $\delta n = d s_3$ wird der Vektor $\mathfrak{t}^*$ um den Winkel $\omega \delta n = \omega d s_3$ um die Normale gedreht, so daß

$$\delta \mathfrak{t}^* = - \delta n \cdot \omega \mathfrak{t}$$

wird. Somit erhalten wir

$$\delta G = - (\delta \nabla_f) \mathfrak{t}^* - \nabla_f (\delta \mathfrak{t}^*) = - \delta n \cdot [(T \mathfrak{t} - N^* \mathfrak{t}^*) \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s^*} + (T \mathfrak{t}^* - N \mathfrak{t}) \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s} - \omega \nabla_f \mathfrak{t} - \mathfrak{t} \nabla_f \omega]$$

$$= \delta n \left(- T \mathfrak{t} \mathfrak{d}^* \mathfrak{t}^* + N \mathfrak{t} \mathfrak{d} \mathfrak{t}^* + \omega G^* + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right),$$

also schließlich

$$\delta G = \delta n \left[G^* (T + \omega) - G N + \frac{\partial \omega}{\partial s} \right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Insbesondere wird (da $G_1^* = G_2$, $G_2^* = - G_1$ und $T^* = - T$ ist):

$$\frac{\partial G_1}{\partial s_3} = G_2 (T_0 + \omega) - G_1 N_1 + \frac{\partial \omega}{\partial s_1}, \qquad \frac{\partial G_2}{\partial s_3} = G_1 (T_0 - \omega) - G_2 N_2 + \frac{\partial \omega}{\partial s_2} \quad (43).$$

Jetzt können die Gleichungen (36) vollends in die Form gebracht werden [2]):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_2} \left(T_0 - \omega + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_3} H + \frac{1}{2 \tau_3} \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \right) - 2 G_1 (T_0 - \omega) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial s_1} \left(T_0 + \omega + \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_3} H + \frac{1}{2 \tau_3} \frac{\partial (\tau_1 - \tau_2)}{\partial s_3} \right) + 2 G_2 (T_0 + \omega) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (44).$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man ω, wie weiter unten an einem Beispiel gezeigt werden soll, ganz eliminieren; dadurch erhält man eine weitere Bedingung für die Hauptschubspannungslinien.

15. Koaxiale Kreiszylinder. Die bisherigen Entwicklungen sollen auf eine Schar koaxialer Kreiszylinder angewendet werden. Die Krümmungslinien auf einem solchen sind die auf ihm liegenden Kreise und seine Erzeugenden; die Tangentenvektoren der ersteren seien mit $\mathfrak{t}'$, die der letzteren mit $\mathfrak{t}'' = \mathfrak{e}$ bezeichnet. Der Halbmesser des Zylinders F sei r (es sei $1/r \neq 0$). Bedeutet ϑ den Winkel des Tangentenvektors $\mathfrak{t}_1$ gegen $\mathfrak{t}'$, so ist $G_1 = \frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}$, $G_2 = \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$, ferner wegen $N' = \frac{1}{r}$ und $N'' = 0$ $H = \frac{1}{2r}$ und $K = 0$ und

---

[1]) In der Tat ist $\nabla_f \mathfrak{t}^* = \mathfrak{t} \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s} + \mathfrak{t}^* \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s^*} = \mathfrak{t} \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s}$ (da wegen $\mathfrak{t}^{*2} = 1$ $\mathfrak{t}^* \frac{\partial \mathfrak{t}^*}{\partial s^*} = 0$ ist), also [vergl. (14)] $\nabla_f \mathfrak{t}^* = \mathfrak{t} \mathfrak{d} \mathfrak{t}^* = - \mathfrak{d} \mathfrak{n} = - G$. Die Formel (41) hängt aufs Engste mit einer Beltramischen Formel für die geodätische Krümmung zusammen (vergl. hierzu Anm. 6 auf S. 220).

Zusatz bei der Korrektur: Die Formel (41) steht, wie sich nachträglich herausstellte, schon bei Weatherburn, l. c. S. 235.

[2]) Man könnte auch auf den Gedanken kommen, eine der Gleichungen (35) — nur eine, weil die andere aus dieser und der auf jeder Fläche identisch erfüllten Gl. (34) folgt — mit Hilfe der Formel (42), der aus (40) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{t}$ fließenden Beziehung

$$\delta \frac{\partial}{\partial s} = \delta n \left(T \frac{\partial}{\partial s^*} - N \frac{\partial}{\partial s} + \omega \frac{\partial}{\partial s^*} \right)$$

und der Formel

$$\delta K = - 2 H K \delta n$$

zu »variieren«; man würde so finden:

$$\frac{\partial}{\partial s_1} [G_1 (T_0 - \omega)] + \frac{\partial}{\partial s_2} [G_2 (T_0 + \omega)] - 2 G_1 G_2 \omega + D \omega = 0$$

(die Bedeutung des Symbols D gibt die Gl. (49) dieser Arbeit). Diese Gleichung, die unabhängig von (27) gilt, ist aber auch eine Folge der Gleichungen (44); sie ergibt sich, wenn man auf die erste die Operation $G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}$, auf die zweite die Operation $G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}$ ausübt und dann die beiden so entstehenden Gleichungen addiert.

Die Annahme $\omega = 0$ zieht also das Bestehen der Beziehung $\frac{\partial (G_1 T_0)}{\partial s_1} + \frac{\partial (G_2 T_0)}{\partial s_2} = 0$ nach sich; diese trifft, wenn die Fläche F nicht eine Ebene oder eine Kugel ist (in welchem Falle für jede Tangentenrichtung $T = 0$ wäre) unter den durch (35) definierten Kurvenscharen im allgemeinen eine enger umgrenzte Auswahl, wie weiter unten an einem Beispiel bewiesen wird.

[nach einem weiter oben schon benutzten Satze von Bonnet[1])] $T_0 = \frac{\sin 2\vartheta}{2r}$. Folglich liefern die Gleichungen (35) die schon länger bekannten Beziehungen[2])

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45),$$

und die Gleichungen (44) ergeben, wenn wir jetzt noch die Forderung (27) hinzunehmen:

$$\left(\frac{\sin 2\vartheta}{r} - 2\omega\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} - \frac{\cos 2\vartheta}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = -\frac{\partial \omega}{\partial s_2}, \quad \frac{\cos 2\vartheta}{r}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} + \left(\frac{\sin 2\vartheta}{r} + 2\omega\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = -\frac{\partial \omega}{\partial s_1} \quad (46).$$

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\sin 2\vartheta}{r} - 2\omega & -\frac{\cos 2\vartheta}{r} \\ \frac{\cos 2\vartheta}{r} & \frac{\sin 2\vartheta}{r} + 2\omega \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2} - 4\omega^2$$

ist, so erkennt man, daß die Annahme $\omega = 0$ die Folge hat, daß $\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} = 0$, also ϑ konstant ist, und dies widerspricht auch der Gl. (45) nicht[3]); die Hauptschubspannungslinien können in diesem Falle nur Schraubenlinien auf den Zylinderflächen sein. Dasselbe ergibt sich etwas allgemeiner, wenn $\omega =$ konst., aber $\omega^2 \neq \frac{1}{4r^2}$ ist; jedoch auch, wenn $\omega = \pm\frac{1}{2r}$ ist, findet man, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, daß nur die Kurven $\vartheta =$ konst. als Hauptschubspannungslinien in Betracht kommen können.

Verschwinden nicht beide Ableitungen $\frac{\partial \omega}{\partial s_1}$, $\frac{\partial \omega}{\partial s_2}$, so ist gewiß $\frac{1}{r^2} - 4\omega^2 \neq 0$; dann besitzen die Gleichungen (46) nichtverschwindende Lösungen $\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}$. Man erhält, wenn man auf die erste den Operator $G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}$, auf die zweite den Operator $G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}$ anwendet und dann die so entstehenden Gleichungen addiert, die Beziehungen (45) berücksichtigt und die Gleichungen (46) zur Elimination der noch einmal auftretenden Größen $\frac{\partial \omega}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial \omega}{\partial s_2}$ heranzieht:

$$2r\omega\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_1}^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_2}^2}\right) = \sin 2\vartheta \cdot \left(10\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_1}^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_2}^2}\right) + 4\cos 2\vartheta \cdot \left[\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial s_2}\right)^2\right] \quad (47).$$

Diese Gleichung stellt ω als eindeutige Funktion von ϑ dar, falls $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_1}^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial {s_2}^2} \neq 0$, d. h. ϑ keine Potentialfunktion auf der Zylinderfläche ist[4]). Dies hat man indessen nicht so zu verstehen, als ob durch (47) zu jedem die Gleichungen (45) befriedigenden Kurvensystem eine passende Funktion ω geliefert würde; denn, setzt man den aus (47) berechneten Wert ω in (46) ein, so erhält man eine weitere Bedingung für ϑ.

16. Die Ebenenschar. Es soll jetzt noch der Fall betrachtet werden, daß die Hauptschubspannungslinien in Ebenen E liegen. Dann ist (vgl. Abschn. **9**) $N_1 = N_2 = T_0 = 0$ und $u_3 = \frac{c + \varkappa t_3}{n w}$, also $\omega = \frac{k + \varkappa}{n w}$. n und ϑ mögen dieselbe Bedeutung haben wie in

---

[1]) Vergl. Anm. 3 auf S. 217.

[2]) Diese Gleichungen wurden (in etwas anderer Form) zum ersten Male von Hencky für den ebenen Fall aufgestellt (l. c. S. 244) und später von Prandtl (diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 401 bis 406), Carathéodory und E. Schmidt (diese Zeitschr. Bd. 3 (1923), S. 468 bis 475) und v. Mises (diese Zeitschr. Bd. 5 (1925), S. 147 bis 149) verwertet.

[3]) Vergl. Jenne, l. c. S. 40.

[4]) Im allgemeinen ist die Differentialgleichung der Potentialfunktionen

$$\left(G_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s_2} - \left(G_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = 0.$$

Die Fälle, in denen die Hauptschubspannungslinien in einer abwickelbaren Fläche ein Isothermensystem bilden, sind von Carathéodory und E. Schmidt vollständig angegeben worden; s. diese Zeitschrift, Bd. 3 (1923), S. 474 f.

Abschn. 9. Setzt man das Bestehen von (27) voraus, so erhält man also aus (32)

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -(\tau_1-\tau_2)\frac{\cos\vartheta}{n}-\tau_3\left(\frac{\sin\vartheta}{n}+2\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}\right)\\ u_2 &= \quad (\tau_1-\tau_2)\frac{\sin\vartheta}{n}+\tau_3\left(\frac{\cos\vartheta}{n}+2\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\right)\\ u_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (48).$$

Folglich findet man aus (30), wenn man bedenkt, daß [1]) $\frac{\partial n}{\partial s_1}=\cos\vartheta$ und $\frac{\partial n}{\partial s_2}=-\sin\vartheta$ ist, bei Verwendung des Symbols

$$D=\left(\frac{\partial}{\partial s_2}-G_1\right)\frac{\partial}{\partial s_1}=\left(\frac{\partial}{\partial s_1}+G_2\right)\frac{\partial}{\partial s_2} \quad \ldots\ldots \quad (49),$$

$$D\vartheta-\frac{\sin\vartheta}{2n}\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}+\frac{\cos\vartheta}{2n}\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}-\frac{\cos 2\vartheta}{4n^2}=0\ ^{2}) \quad \ldots\ldots \quad (50);$$

zudem gibt (31):

$$\left.\begin{aligned} &(\tau_1-\tau_2)\left[\frac{\cos\vartheta}{n}\left(\omega-\frac{\partial\vartheta}{\partial s_3}\right)+\frac{\sin\vartheta}{n^2}\frac{\partial n}{\partial s_3}\right]+\tau_3\left[\frac{\sin\vartheta}{n}\left(\omega+\frac{\partial\vartheta}{\partial s_3}\right)\right.\\ &\qquad\left.+\frac{\cos\vartheta}{n^2}\frac{\partial n}{\partial s_3}-2\frac{\partial G_2}{\partial s_3}+2\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}\omega\right]=0\\ &(\tau_1-\tau_2)\left[-\frac{\sin\vartheta}{n}\left(\omega-\frac{\partial\vartheta}{\partial s_3}\right)+\frac{\cos\vartheta}{n^2}\frac{\partial n}{\partial s_3}\right]-\tau_3\left[\frac{\cos\vartheta}{n}\left(\omega+\frac{\partial\vartheta}{\partial s_3}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\sin\vartheta}{n^2}\frac{\partial n}{\partial s_3}+2\frac{\partial G_1}{\partial s_3}+2\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\omega\right]=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (51).$$

Eine einfache Ueberlegung lehrt, daß $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_3}=\omega-\frac{k}{nw}=\frac{\varkappa}{nw}$ ist. Führt man die in der Richtung t gemessene Entfernung m des Punktes P von der Hauptnormalen der Kurve C oder, wenn $k=0$ ist, von einer in der Ebene E festen, auf $\mathfrak{t}=\mathfrak{c}$ senkrechten Geraden ein, so findet man, weil $\frac{\partial}{\partial s_3}(m\,\mathfrak{t}+n\,\mathfrak{h})=\frac{\partial m}{\partial s_3}\mathfrak{t}+\frac{\partial n}{\partial s_3}\mathfrak{h}+\mathfrak{c}\times(m\,\mathfrak{t}+n\,\mathfrak{h})\frac{ds}{ds_3}$ die Richtung $\mathfrak{t}_3$ haben muß, $\frac{\partial n}{\partial s_3}=-mk\frac{ds}{ds_3}=-\frac{mk}{nw}$. Für $\frac{\partial G_1}{\partial s_3}$ und $\frac{\partial G_2}{\partial s_3}$ können auf Grund der folgenden Betrachtung andere Ausdrücke gesetzt werden: Wenn $\omega=0$ wäre, so wäre das System der Hauptschubspannungslinien in E dem in einer Nachbarebene $\bar{E}$ kongruent, es würden sich somit G_1 und G_2 beim Uebergang von E zu $\bar{E}$ gar nicht ändern; ist aber $\omega\neq 0$, so ändern sich die Kurvenscharen ebenso, wie wenn jedes Richtungspaar $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ innerhalb E um den Winkel $\omega\,ds_3$ gedreht würde. Nun ist die geodätische Krümmung G einer Kurve, die mit $\mathfrak{t}_1$ überall den Winkel φ bildet, nach einer schon im Abschn. 8 angeführten Formel von Liouville [3])

$$G=G_1\cos\varphi+G_2\sin\varphi+\frac{d\varphi}{ds}=\left(G_1+\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}\right)\cos\varphi+\left(G_2+\frac{\partial\varphi}{\partial s_2}\right)\sin\varphi;$$

also wird (für $\varphi=\omega\,ds_3=\omega\,w\,n\,ds$) $\frac{\partial G_1}{\partial s_3}=G_2\,\omega+\frac{\partial\omega}{\partial s_1}+\frac{\omega}{n}\cos\vartheta$, und (für $\varphi=\frac{\pi}{2}+\omega\,ds_3$) $\frac{\partial G_2}{\partial s_3}=-G_1\,\omega+\frac{\partial\omega}{\partial s_2}-\frac{\omega}{n}\sin\vartheta$. Folglich bekommt man (da $1/w\neq 0$ ist):

$$\left.\begin{aligned} &k\left[(\tau_1-\tau_2)(n\cos\vartheta-m\sin\vartheta)-\tau_3(n\sin\vartheta+m\cos\vartheta)\right]\\ &\qquad+2n^2w\tau_3\left[2\omega\left(\sin\vartheta+n\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}\right)-n\frac{\partial\omega}{\partial s_2}\right]=0,\\ &k\left[(\tau_1-\tau_2)(n\sin\vartheta+m\cos\vartheta)-\tau_3(n\cos\vartheta-m\sin\vartheta)\right]\\ &\qquad+2n^2w\tau_3\left[2\omega\left(\cos\vartheta+n\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}\right)+n\frac{\partial\omega}{\partial s_1}\right]=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (52).$$

---

[1]) Siehe Jenne, l. c. S. 32, Gl. (37).

[2]) Dies ist (mit kleinen Formunterschieden) die Gl. (41) bei Jenne, l. c. S. 33. Im Fall der Rotationssymmetrie ist die Gl. (50) wegen (49) gleichbedeutend mit den beiden Gleichungen (14) bei Hencky, l. c. S. 249 (es ist dort $dn_2=-ds_2$ hier). Es möge daran erinnert werden, daß hier $G_1=\frac{\partial\vartheta}{\partial s_1}$ und $G_2=\frac{\partial\vartheta}{\partial s_2}$ ist (dies ist dann und nur dann der Fall, wenn ϑ von den Tangenten einer Schar von geodätischen Linien aus gemessen ist, deren Orthogonaltrajektorien auch geodätische Linien sind, und solche orthogonalen Scharen geodätischer Linien gibt es wegen (34) nur auf den abwickelbaren Flächen). (Eine geodätische Linie ist durch das Verschwinden von G längs der Kurve definiert.)

[3]) Vergl. Anm. 2 auf S. 217.

Auch aus diesen Gleichungen könnte man auf dem oben beschriebenen Wege ω eliminieren, so daß man zu einer weiteren Bedingung für ϑ käme.

Wie selbstverständlich zu erwarten war, sind die Beziehungen (52) im Falle der Rotationssymmetrie, da dann $k = 0$ ist, unter der Annahme $\omega = 0$ für jedes der Gl. (50) genügende Kurvensystem erfüllt.

Schlußbemerkung. Die vorstehenden Ausführungen wollten zeigen, wie man, ausgehend allein von der Gleichgewichtsbedingung für die Spannungen, im allgemeinen zu mehr als einer Bestimmungsgleichung für die Hauptschubspannungslinien gelangen kann. Eine vollständige Behandlung des Problems würde außerdem die Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Spannungen und Deformationsgeschwindigkeiten erheischen; wie diese zu weiteren Beziehungen, den Kompatibilitätsbedingungen, führt, hat neben anderem, was hier nicht berührt wurde, Jenne in seiner öfters zitierten Arbeit erörtert.

905

Das Inertialsystem.

Von **KARL KOMMERELL** in Tübingen.

Unter denjenigen Forschern, die lange vor den Theorien Einsteins den relativistischen Standpunkt in der Mechanik konsequent vertreten haben, ist neben C. Neumann, Mach, Mac Gregor u. a. Ludwig Lange, der Schöpfer des Inertialsystems zu nennen. Seeliger[1]) hat gewiß recht, wenn er die Festsetzungen Langes als »einen wesentlichen Fortschritt« und als »einen sehr wichtigen Beitrag zur Klarlegung der schwierigen und wichtigen Probleme, die die Grundprinzipien der Bewegungslehre betreffen« bezeichnet. An die Arbeiten von Lange[2]) hat sich eine große Literatur angeschlossen, die in der letzten unter 2) erwähnten Arbeit ausführlich angegeben ist. In die Lehrbücher hat der Begriff des Inertialsystems kaum Eingang gefunden. Dies hängt mit dem etwas komplizierten mathematischen Apparat zusammen, den die Beweise von Lange und Seeliger besitzen. In der folgenden Arbeit möchte ich nun zeigen, wie der Begriff des Inertialsystems und der Inertialzeit mit den elementarsten Hilfsmitteln abgeleitet werden kann. Des weiteren wird gezeigt werden, daß die Begriffe »Inertialsystem« und »Inertialzeit« sich wesentlich erweitern lassen, so daß man zu Gedankengängen gelangt, die in enger Beziehung zur Einsteinschen Relativitätstheorie stehen.

Im Raum seien irgend drei sich bewegende Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben, dann gilt der von Lange abgeleitete Satz, daß es ein Bezugssystem gibt, in Beziehung auf welches jene Punkte auf drei vom Bezugspunkt ausgehenden Geraden fortschreiten. Ein vierter beweglicher Punkt P_4 wird aber dann im allgemeinen, d. h. wenn die Art seiner Bewegung keiner Bedingung unterworfen ist, in bezug auf dieses System eine krumme Linie beschreiben. Zum Beweise beschreibe man über den Seiten des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ als Durchmessern je eine Kugel. Man macht sich leicht klar, daß, solange das Dreieck keinen stumpfen Winkel besitzt, diese Kugeln zwei symmetrisch zur Ebene $P_1 P_2 P_3$ liegende Punkte bestimmen, von denen aus gesehen die Seiten des Dreiecks unter rechten Winkeln erscheinen. Uebrigens erhält man diese Punkte auch, wenn im Höhenschnittpunkt des Dreiecks auf der Ebene das Lot errichtet und mit einer der Kugeln geschnitten wird. Wir nennen den Punkt O, von dem aus die Punkte $P_1 P_2 P_3$ im Uhrzeigersinn aufeinander folgen. Sind die Punkte in die Lage $P_1' P_2' P_3'$ gerückt und ist das neue Dreieck immer noch spitzwinklig, so konstruiere man gerade so wie vorher den Punkt O' usw. Jetzt lege man die Tetraeder $O P_1 P_2 P_3$, $O' P_1' P_2' P_3'$, $O'' P_1'' P_2'' P_3''$ usw. so zueinander, daß entsprechende Geraden wie $O P_1$, $O' P_1'$, $O'' P_1''$ usw. sich decken, dann ist ein Cartesisches

[1]) H. Seeliger, Kritisches Referat über Langes Arbeiten, Vierteljahrschrift d. Astrom. Ges., Jahrg. 22, S. 252 bis 259.

[2]) L. Lange, Wundts Phil. Stud. 2, 1885, S. 266 bis 297; ibid. S. 539 bis 545. »Ueber das Beharrungsgesetz«, Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1885, Math. Phys.-Kl. S. 333 bis 351. In dieser Arbeit ist der math. Beweis für die Konstruktion des Inertialsystems enthalten, den in etwas anderer Form auch Seeliger in den Sitz.-Ber. d. Math. Phys.-Kl. d. Kgl. Bayr. Acad. d. Wiss., München 1906, Bd. 36, S. 85 bis 137 gegeben hat. L. Lange, »Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffs«, Wundts Phil. Stud. 3, 1886, S. 337 bis 419, S. 643 bis 691. Wundts Phil. Stud. 20, 2. Tl. 1902, S. 1 bis 71. Wegen der Lit. vergl. man auch A. Müller, »Das Problem des absoluten Raumes usw.«, die Wiss., Heft 39 (1911) und A. Voss, »Die Prinzipien der Rationellen Mechanik«, Encykl. der math. Wiss. Bd. IV,1 (1901), S. 36.

Bezugssystem gefunden, auf dessen Achsen $P_1 P_2 P_3$ fortschreiten. Diese Konstruktion wird unmöglich, sobald das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ oder eines der folgenden stumpfwinklig ist, da aus den Koordinatenebenen eines rechtwinkligen Systems von einer beliebigen Ebene nie ein stumpfwinkliges Dreieck ausgeschnitten wird.

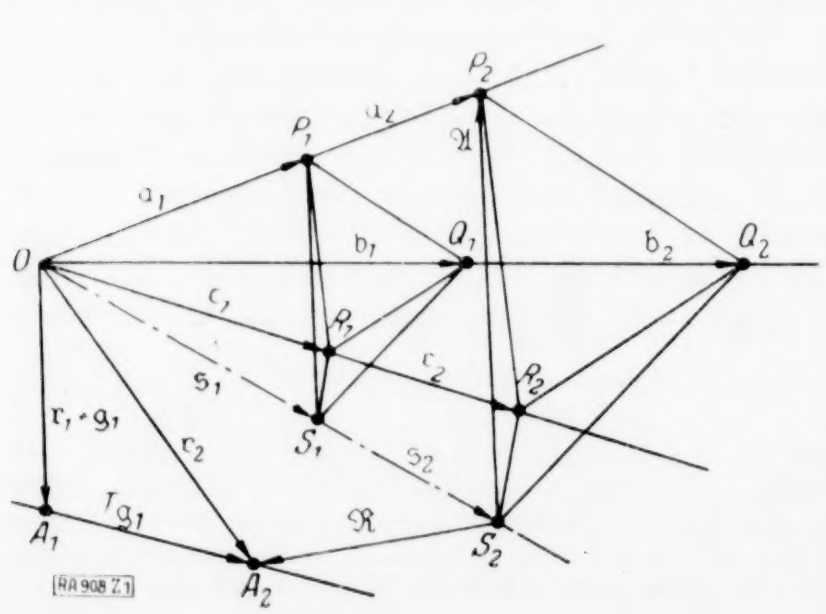
Allgemein kann man einen beliebigen Punkt O für die Lage $P_1 P_2 P_3$ wählen und ihn mit $P_1 P_2 P_3$, die nicht in gerader Linie liegen mögen, verbinden. Ist $P_1' P_2' P_3'$ eine neue Lage der beweglichen Punkte, so konstruiere man den geometrischen Ort für alle Punkte O', so daß $\sphericalangle P_1' O' P_2' = \sphericalangle P_1 O P_2$ (Ringfläche). Entsprechend konstruiere man die Ringfläche für $P_2' P_3'$ bezüglich des Winkels $P_2 O P_3$ und für $P_3' P_1'$. Diese drei Flächen werden im allgemeinen einen Punkt O' geben derart, daß die Dreikante $O, P_1 P_2 P_3$ und $O', P_1' P_2' P_3'$ zur Deckung gebracht werden können. Man hat dann wieder ein Bezugssystem der verlangten Art. Aber auch hier kann im Laufe der Bewegung die Konstruktion unmöglich werden. Mehr als soeben haben natürlich auch Lange und Seeliger durch ihre analytischen Methoden nicht beweisen können; in der Tat treten bei ihnen unter Umständen imaginäre Lösungen auf.

Für die Begründung des Inertialsystems kommt nur der besondere Fall in Frage, wo die Dreiecke im Lauf der Bewegung immer einander ähnlich bleiben. Hier gibt es stets ein solches Bezugssystem, ja unendlich viele. Man braucht den Punkt O nur beliebig, aber nicht in der Dreiecksebene liegend wählen und dann die Pyramide $O P_1 P_2 P_3$ in passendem Maßstabe in ähnlicher Weise vergrößern oder verkleinern, bis das Dreieck $P_1 P_2 P_3$ mit $P_1' P_2' P_3'$ kongruent wird: die Pyramide $O P_1 P_2 P_3$ geht dann in $O P_1' P_2' P_3'$ über, und die Punkte P_1, P_2, P_3 bewegen sich relativ zum System $O P_1 P_2 P_3$ auf den bezüglichen Kanten, und zwar sind die in gleichen Zeiten zurückgelegten Wege proportional.

Zur Konstruktion des Inertialsystems gibt nun Lange folgende Vorschrift: »Drei materielle Punkte werden gleichzeitig vom gleichen Raumpunkt aus projiziert und dann sich selbst überlassen. Nachdem man sich überzeugt hat, daß sie nicht in einer Geraden liegen, verbindet man sie geradlinig mit einem vierten beliebigen Raumpunkt, wodurch eine dreiseitige Ecke zustande kommt. Läßt man diese Ecke unverändert ihre Gestalt bewahren und paßt man sie den Fundamentalpunkten dermaßen an, daß jeder Punkt ununterbrochen auf einer Kante fortschreitet, so ist jedes Koordinatensystem, worin die Ecke eine unveränderliche Lage hat, ein Inertialsystem. Die Ecke kann auch gleich als inertielles Bezugssystem eingeführt werden, nur dürfen ihre Kanten nicht in einer Ebene liegen.« Für ein Inertialsystem gilt nun das

Theorem I. In bezug auf ein Inertialsystem schreitet jeder weitere sich selbst überlassene Punkt in einer Geraden fort. Die von den selbstüberlassenen Punkten in den so bestimmten Bahnen zurückgelegten Wege sind einander proportional.

In der Figur seien $P_1 Q_1 R_1$ die Fundamentalpunkte, die von O gleichzeitig fortgeschleudert auf $\overrightarrow{OP_1} = \mathfrak{a}_1$, $\overrightarrow{OQ_1} = \mathfrak{b}_1$, $\overrightarrow{OR_1} = \mathfrak{c}_1$ ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$ Vektoren) fortschreiten. S_1 sei der vierte Raumpunkt, der mit P_1, Q_1, R_1 verbunden werde, so daß bei S_1 »die dreiseitige Ecke« entsteht. Man vergrößere nun die Figur im Maßstabe $1 : T$, wobei O der Aehnlichkeitspunkt sei. Man erhält so $P_2 Q_2 R_2$ als neue Lage der drei sich selbst überlassenen Punkte $P_1 Q_1 R_1$, und S_1 ist in S_2 übergegangen. Man muß sich nun die »Ecke« S_1 auf die Ecke S_2 gelegt denken oder, was auf dasselbe herauskommt: der Beobachter, der in der Lage $P_1 Q_1 R_1$ in S_1 sich befand, möge in der zweiten Lage in S_2 sich befinden, dann werden für ihn die Punkte $P_1 Q_1 R_1$ auf den Kanten $S_1 P_1$, $S_1 Q_1$, $S_1 R_1$ fortzuschreiten scheinen, und da $S_1 P_1 : S_2 P_2 = S_1 Q_1 : S_2 Q_2 = S_1 R_1 : S_2 R_2$ ist, so sind die von den selbst überlassenen Punkten $P_1 Q_1 R_1$ auf den Kanten $S_1 P_1$, $S_1 Q_1$, $S_1 R_1$ des selbst bewegten Inertialsystems S_1 zurückgelegten Wege einander proportional.



Bezeichnet man die Vektoren $\vec{OP_2}$, $\vec{OQ_2}$, $\vec{OR_2}$ $\vec{OS_1}$, $\vec{OS_2}$ mit $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$, so hat man

$$\mathfrak{a}_2 = T\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_2 = T\mathfrak{b}_1,\ \mathfrak{c}_2 = T\mathfrak{c}_1,\ \mathfrak{s}_2 = T\mathfrak{s}_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (1).$$

Sei nun A_1 ein vierter sich selbst überlassener Punkt, der in derselben Zeit, in der P_1 nach P_2 gelangt, von A_1 nach A_2 auf der Geraden L kommt, so hat man

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1 + T\mathfrak{g}_1 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2),$$

wo $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ die Vektoren $\vec{OA_1}$ und $\vec{OA_2}$ bedeuten und $\mathfrak{g}_1$ ein Vektor ist, der die Richtung von L festlegt. Ist nun $\mathfrak{R}$ der Vektor $\vec{S_2A_2}$, so hat man

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{s}_2 \quad \text{oder nach (1) und (2)}$$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + T(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{s}_1) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Bezeichnet man endlich die Radienvektoren S_2P_2, S_2Q_2, S_2R_2 mit $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{B}$ $\mathfrak{C}$, so ergibt sich unmittelbar aus der Figur

$$\mathfrak{A} = T(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{s}_1), \qquad \mathfrak{B} = T(\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{s}_1), \qquad \mathfrak{C} = T(\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{s}_1) \ . \ . \ . \quad (4).$$

Die Gl. (3) und (4) beschreiben die Bewegung der vier sich selbst überlassenen Punkte in Beziehung auf das Inertialsystem S_2 (P_2 Q_2 R_2) und enthalten, da der »Parameter« T linear in den Gl. (3) und (4) auftritt, den Beweis des Theorems I. Wie aus der Formel (1) $\mathfrak{s}_2 = T\mathfrak{s}_1$ hervorgeht, ist das Inertialsystem S_2 in bezug auf das Inertialsystem O in translatorischer Bewegung begriffen, derart, daß die Wege, die S_1 auf OS_1 zurücklegt, proportional zu den entsprechenden Wegen der sich selbst überlassenen Punkte sind oder kurz: S_2 bewegt sich wie ein selbst überlassener Punkt. Wie man sieht, beruht alles auf der Tatsache, daß der Raum Aehnlichkeitstransformationen zuläßt. Die Gl. (3) und (4) definieren eine »Galileitransformation«. Es ist leicht zu sehen, daß alle derartigen Transformationen eine Gruppe bilden.

Da T als Parameter aufgefaßt werden kann, der die geometrische Konfiguration festlegt, so ist der Begriff des Inertialsystems und das Theorem I von dem Begriff der Zeit unabhängig. Lange definiert nun im Anschluß an C. Neumann[1]) auf Grund seines Inertialsystems die Zeit durch folgende Festsetzung: »Inertialzeitskala heißt eine jede Zeitskala, in bezug auf welche ein sich selbst überlassener Punkt gleichförmig fortschreitet. Man kann also z. B. die Bewegung des sich selbst überlassenen Punktes P_2 in bezug auf das Inertialsystem S_2 zur Zeitmessung verwenden, indem man gleichen Wegstrecken von P_2 gleiche Zeitstrecken zuordnet. Der Parameter T in (3) und (4) kann also als Inertialzeit gedeutet werden. In dem Vorstehenden ist auch der Beweis des Theorems II von Lange enthalten.

Theorem II. In bezug auf eine Inertialzeitskala ist jeder beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertialbahn gleichförmig bewegt.

Damit sind die Langeschen Theoreme alle bewiesen. Noch ein paar kritische Bemerkungen. Man hat mit Recht gefragt, was sind denn nun sich selbst überlassene Punkte? Alle Antworten auf diese heikle Frage sind unzulänglich. Es wird nie gelingen, sich selbst überlassene Punkte aufzuweisen. Unseres Erachtens ist die Festlegung des Begriffs »selbst überlassener« Punkt Sache der Konvention. Um dies zu begründen, denken wir uns drei beliebige im Raum sich bewegende Punkte P_1 Q_1 R_1: ihre Bewegung möge derart sein, daß die Dreiecke P_2 Q_2 R_2, P_3 Q_3 R_3 ... der sich bewegenden Punkte in den aufeinanderfolgenden Lagen mit dem Dreieck P_1 Q_1 R_1 ähnlich sind, und daß entsprechende Strecken immer wachsen oder immer abnehmen, dann kann man nach den obigen Auseinandersetzungen stets ein Bezugsystem O P_1 Q_1 R_1 derart finden, daß die Punkte auf den Kanten OP_1, OQ_1, OR_1 fortschreiten und entsprechende Wege der drei Punkte einander proportional sind. Diese drei Punkte definieren wir nun als sich selbst überlassene Punkte. Wir fassen die Bewegung eines von ihnen, etwa P_1, als Standardbewegung auf und gründen auf diese Bewegung in bezug auf das System O P_1 Q_1 R_1 eine Zeitskala, indem wir festsetzen, daß, so oft P_1 die Längeneinheit zurückgelegt hat, ebensoviele Zeiteinheiten verflossen sind. Als Beispiel wähle man die drei Punkte an der Erdoberfläche (Kugel) und überlasse sie dem freien Fall; dabei möge das

[1]) C. Neumann, »Ueber die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie«, Leipzig 1870.

Schwerefeld konstant und zum Erdmittelpunkt O hingerichtet sein. Ist der Erdradius die Längeneinheit, so hätte man, wenn t Sekunden bedeutet, durch

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \left(1 - \frac{g\,t^2}{2}\right), \qquad \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1 \left(1 - \frac{g\,t^2}{2}\right), \qquad \mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1 \left(1 - \frac{g\,t^2}{2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die Lage $P_2\,Q_2\,R_2$ der Punkte $P_1\,Q_1\,R_1$ zur Zeit t festgelegt, wo g die konstante in unserem Maße sehr kleine Erdbeschleunigung ist. Macht man nun die »Zeittransformation«

$$T = 1 - \frac{g\,t^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

so hat man genau wieder die Formel (1)

$$\mathfrak{a}_2 = T\,\mathfrak{a}_1\,, \qquad \mathfrak{b}_2 = T\,\mathfrak{b}_1\,, \qquad \mathfrak{c}_2 = T\,\mathfrak{c}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Zum allgemeinen Falle zurückkehrend, möge T die oben definierte Zeit sein, so würde auch jetzt die Bewegung der Punkte $P_1\,Q_1\,R_1$ durch (7) beschrieben werden, wenn der Betrag von $\mathfrak{a}_1$ als Längeneinheit genommen wird. Bewegt sich nun ein vierter Punkt in bezug auf das System O gemäß der Formel (2)

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + T\,\mathfrak{g}_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

so bezeichnen wir diesen Punkt als »sich selbst überlassenen« Punkt. Nun läst sich genau wie oben das System S_2 bestimmen, wobei $\mathfrak{s}_2 = T\,\mathfrak{s}_1$ ist, und die Bewegung der vier Punkte erfolgt in bezug auf das System S_2 gemäß der Formeln (3) und (4) also

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + T(\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{s}_1)\,, \quad \mathfrak{A} = T(\mathfrak{a}_1 - \mathfrak{s}_1)\,, \quad \mathfrak{B} = T(\mathfrak{b}_1 - \mathfrak{s}_1)\,, \quad \mathfrak{C} = T(\mathfrak{c}_1 - \mathfrak{s}_1) \quad (9).$$

Wir bezeichnen die Bezugssysteme O und S_2 als Inertialsysteme und die Zeit T als Inertialzeit, und alle Definitionen und Theoreme von Lange sind erfüllt. Diese Inertialzeit, die sich auf eine willkürliche Standardbewegung gründet, wird im allgemeinen für unser Bewußtsein nicht gleichmäßig abfließen. Prinzipiell spielt dies aber keine Rolle. Fließt denn die Sternzeit gleichmäßig ab? Zur Entscheidung dieser Frage gibt es kein Mittel [1]).

Je nach der Wahl der Standardbewegung, an die man die Definition der Inertialzeitskala knüpft, wird die aufzubauende Mechanik sehr verschieden ausfallen. Nennt man $\frac{d\,\mathfrak{R}}{d\,T}$ die Geschwindigkeit und $\frac{d^2\,\mathfrak{R}}{d\,T^2}$ die Beschleunigung des Massenpunkts, dem im Inertialsystem der Radiusvektor $\mathfrak{R}$ zukommt, so gilt auch jetzt: Sich selbstüberlassene Punkte bewegen sich ohne Beschleunigung und umgekehrt können nicht beschleunigte Punkte als »sich selbstüberlassene« gelten. Bewegt sich ein Punkt so, daß seine Beschleunigung nicht konstant gleich Null ist, so kann man die Ursache der Beschleunigung Kraft nennen und sie proportional $\frac{d^2\,\mathfrak{R}}{d\,T^2}$ setzen. Das Trägheitsgesetz würde dann aussagen, daß Punkte, auf die keine Kräfte wirken, sich selbst überlassene Punkte sind in bezug auf ein Inertialsystem, also entweder mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie sich bewegen oder beständig ruhen. Diese Aussage ist aber jetzt nicht mehr ein aus der Erfahrung geschöpftes Gesetz, sondern durch die Definition erzwungen. Benutzt man z. B. die drei oben erwähnten in einem konstanten Schwerefeld sich bewegenden Punkte zur Festlegung eines Inertialsystems und einer Inertialzeitskala, so würde jetzt durch diese Festsetzung das Schwerefeld verschwinden, die Schwerkraft wäre »wegtransformiert«. Man sieht, wie nahe die (genügend weit gefaßten) Konzeptionen Langes mit bekannten Gedankengängen Einsteins in Berührung stehen. Und doch ist es von Lange zu Einstein ein weiter Weg. Denn in den vorliegenden Transformationen handelt es sich, man mag die Inertialzeit festlegen wie man will, stets um Galileitransformationen. Etwas ganz anderes ist aber eine Lorentztransformation oder eine allgemeine Transformation im Sinne des allgemeinen Relativitätsprinzips.

Lange hat gewiß recht, wenn er seinem Inertialsystem und seiner Inertialzeit in methodischer Hinsicht großen Wert beimißt. Insbesondere birgt die Abnahme der Zeit an einem rotierenden Körper, wie wir es bei der Erddrehung zu tun gewohnt sind, gegenüber der einfachen Neumann-Langeschen Definition mancherlei Schwierigkeiten in sich, namentlich wenn der Körper zugleich mit der Rotation noch sonst sich

[1]) Bemerkenswert ist eine Aeußerung von Newton (Anmerkungen zu den Prinzipien, 2. Aufl., 1714, S. 7): »Möglicherweise gibt es gar keine gleichmäßige Bewegung, wodurch die Zeit genau gemessen würde. Alle Bewegungen können schneller und langsamer werden, aber der Fluß der absoluten Zeit ist unveränderlich«.

bewegt. Wie praktisch ein Inertialsystem und eine Inertialzeitskala festgelegt werden kann, ist vor allem Sache der Astronomen. Es darf in dieser Beziehung auf die oben erwähnten Arbeiten von Seeliger hingewiesen werden, von denen man auch dadurch sympathisch berührt wird, daß er den Definitionen von Lange volle Gerechtigkeit wiederfahren läßt.

Lange stellt im Anschluß an eine Arbeit von L. Weber[1]) die Frage: Für einen Komplex von ganz bedingungslos, auch ohne irgend welche dynamischen Voraussetzungen bewegten Massenpunkten soll das Koordinatensystem konstruiert werden, in bezug auf welches die gesamte lebendige Kraft des Systems $\Sigma m v^2/2$ jeder Zeit ein Minimum ist. Die Frage ist, unter welchen Umständen dieses System ein Inertialsystem ist.

Zur Beantwortung dieser Frage beziehe man die Bewegung des Massensystems auf ein Koordinatensystem Σ_0, das ein Inertialsystem, also etwa raumfest sei. Die gesamte lebendige Kraft setzt sich zusammen aus der lebendigen Kraft des Schwerpunkts S, indem die Gesamtmasse vereinigt zu denken ist, und aus der lebendigen Kraft der Massen in bezug auf ein Koordinatensystem Σ, dessen Achsen parallel zu den Achsen von Σ_0 gehen, dessen Ursprung aber beständig der Schwerpunkt S ist. Da diese beiden Teile der lebendigen Kraft voneinander unabhängig sind, so muß jeder einzelne Teil zum Minimum gemacht werden. Der erste Teil wird aber Null, wenn wir die Bewegung der Massen auf das System Σ beziehen. Σ kann nur dann ein Inertialsystem sein, wenn S in bezug auf Σ_0 eine Gerade mit konstanter Geschwindigkeit zurücklegt. Nun lassen wir ein Koordinatensystem Σ', dessen Ursprung ebenfalls der Schwerpunkt S sei, relativ zum System Σ um eine durch S gehende Achse $\mathfrak{a}$ (Einheitsvektor) mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich drehen, berechnen die lebendige Kraft L' des Massensystems in bezug auf Σ' und wählen dann $\mathfrak{a}$ und ω so, daß L' ein Minimum wird. Ist $\mathfrak{r}_i$ der Radiusvektor von S zu dem i-ten Massenpunkt m_i, dann besitzt dieser Punkt, wenn man ihn mit Σ' fest verbunden denkt, in bezug auf Σ die Führungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_f$

$$\mathfrak{v}_f = (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wobei $\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i$ das vektorielle Produkt bedeutet. Ist $\mathfrak{v}_i = \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenpunkts in bezug auf Σ, $\mathfrak{v}_i'$ in bezug Σ', dann hat man

$$\mathfrak{v}_i = \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt} = \mathfrak{v}_i' + (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)\,\omega$$

oder

$$\mathfrak{v}_i' = \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt} - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)\,\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

Die lebendige Kraft L' des Massensystems in bezug auf Σ' berechnet sich daher aus

$$2\,L' = \Sigma\, m_i \left\{ \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt} - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)\,\omega \right\}^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

wo die Summe über alle Massenpunkte sich erstreckt. Aus (12) folgt

$$2\,L' = \Sigma\, m_i \left(\frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right)^2 - 2\,\omega\,\Sigma\, m_i \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i) + \omega^2\,\Sigma\, m_i (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Nun ist

$$\Sigma\, m_i \left(\frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right)^2 = 2\,L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wo L die lebendige Kraft in Beziehung auf Σ ist. Weiter ist

$$\Sigma\, m_i \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i) = \Sigma\, m_i\, \mathfrak{a} \left(\mathfrak{r}_i \times \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right) = \mathfrak{a}\,\Sigma\, m_i \left(\mathfrak{r}_i \times \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{M} \quad . \quad . \quad (15),$$

wo

$$\mathfrak{M} = \Sigma\, m_i \left(\mathfrak{r}_i \times \frac{d\,\mathfrak{r}_i}{dt}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

der Vektor des Impulsmoments der bewegten Massen in bezug auf Σ ist. Da weiter $(\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)^2$ das Quadrat des Abstandes des i-ten Massenpunkts von der Achse $\mathfrak{a}$ ist, so ist

$$J = \Sigma\, m_i (\mathfrak{a} \times \mathfrak{r}_i)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

---

[1]) L. Weber »Ueber das Galileische Prinzip«, Kiel 1891. L. Lange, Wundts Phil. Stud. 20, 2. Teil 1902, S. 50.

das Trägheitsmoment des Massensystems zur Zeit t in bezug auf die Achse $\mathfrak{a}$. Aus (13), (14), (15) und (17) folgt

$$2\,L' = 2\,L - 2\,\omega\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{M}) + \omega^2 J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18).$$

Wir wählen nun unter Festhaltung von $\mathfrak{a}$ die Größe ω so, daß L' ein Extremum wird: also

$$-(\mathfrak{a}\,\mathfrak{M}) + \omega\,J = 0\,,$$

$$\omega = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{M}}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

und, wenn man diesen Wert in (18) einführt,

$$2\,L' = 2\,L - \frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{M})^2}{J} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

Hier ist nun der Vektor $\mathfrak{a}$, der nach (17) auch in J steckt, so zu wählen, daß

$$\frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{M})^2}{J}$$

möglichst groß wird. Setzt man

$$\mathfrak{M} = M \cdot \mathfrak{b} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21),$$

wo M der Betrag von M und $\mathfrak{b}$ ein Einheitsvektor ist, so folgt

$$\frac{(\mathfrak{a}\,\mathfrak{M})^2}{J} = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{J}}\,\mathfrak{b}\right)^2 M^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22).$$

Die Massen m_i zur Zeit t bestimmen in bezug auf Σ ein Trägheitsellipsoid, der Endpunkt des Vektors $\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{J}}$ liegt auf diesem Trägheitsellipsoid. Das skalare Produkt $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{J}}\,\mathfrak{b}\right)$ in (22) stellt die Projektion jenes Vektors auf den Vektor $\mathfrak{b}$, d. h. auf den Vektor des Impulsmoments dar. Soll diese Projektion möglichst groß werden, so muß die Tangentialebene im Endpunkt des Vektors $\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{J}}$ an das Trägheitsellipsoid senkrecht auf dem Vektor des Impulsmoments stehen. Man erhält also die Drehachse $\mathfrak{a}$ dadurch, daß man für jeden Zeitpunkt t für den Schwerpunkt das Trägheitsellipsoid ermittelt und an dieses die Tangentialebene senkrecht zum Vektor des Impulsmoments legt. Die Verbindungslinie des Schwerpunkts und des Berührungspunkts ist die Drehachse.

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist nach (19) und (21)

$$\omega = \left(\frac{\mathfrak{a}}{\sqrt{J}}\,\mathfrak{b}\right)\frac{M}{\sqrt{J}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23),$$

also gleich dem Produkt des Abstands des Schwerpunkts von der Berührungsebene, des absoluten Betrags M des Impulsmoments und des Abstands des Schwerpunkts vom Berührungspunkt $\left(\frac{1}{\sqrt{J}}\right)$.

Für den Minimalwert der lebendigen Kraft erhält man nach (19) und (20)

$$L' = L - {}^1/_2\,\omega^2 J \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

Der Minimalwert ist also gleich der lebendigen Kraft L in bezug auf Σ und der lebendigen Kraft der Drehung des als erstarrt gedachten Massensystems um die Achse $\mathfrak{a}$.

Ist das Massensystem starr, so ist die oben bestimmte Drehachse $\mathfrak{a}$ nichts anderes als die Momentenachse und ω die Winkelgeschwindigkeit um diese, und L' ist dann gleich Null. Es ist auch klar, daß das Bezugsystem nur dann ein Inertialsystem sein kann, wenn $\omega = 0$ ist.

Diese Ergebnisse sind in Uebereinstimmung mit der Lösung der Aufgabe von A. Brill, die Lange in Wundts Phil. Stud., Bd. 20, 2. Tl, 1902, S. 50, ohne Beweis mitgeteilt hat, und die in den soeben erschienenen »Vorlesungen über allgemeine Mechanik« von A. Brill, S. 318 ff., gegeben ist. Vorstehenden Beweis hat der Verfasser, ehe er Kenntnis von dem Beweisgange hatte, Herrn A. Brill 1921 übersandt. Da dieser Beweis mir einfacher scheint, so habe ich nicht gezögert, ihn hier zu veröffentlichen. Der ganze Aufsatz ist ein Auszug aus einem Vortrag, den ich 1921 im math.-naturwiss. Verein von Württemberg zu Ehren und in Anwesenheit Ludwig Langes gehalten habe. 908

Zur Theorie der linearen Mehrfachkorrelation.

Von **F. BAUR** in Berlin.

Sind zwei zufällige Veränderliche X_0 und X_1 derart voneinander abhängig, daß X_0 auch nach dem Festlegen des Wertes von X_1 als zufällige Veränderliche erscheint, so sprechen wir von einer stochastischen Verbundenheit. Die Gesamtheit der verschiedenen Kombinationen der möglichen Werte stochastisch verbundener Veränderlichen und der diesen Kombinationen zukommenden Wahrscheinlichkeiten nennen wir das Abhängigkeitsgesetz der zufälligen Veränderlichen. Die Begriffe der stochastischen Verbundenheit und des Abhängigkeitsgesetzes zufälliger Veränderlichen sowie die Aufstellung von Maßzahlen zur Kennzeichnung des Abhängigkeitsgesetzes lassen sich auch auf mehr als zwei Veränderliche ausdehnen. Diese Erweiterung ist von entscheidender Bedeutung für die Lösung des Problems der Vorhersage im Bereiche der nicht-funktionellen Zusammenhänge. Trotz dieser großen Wichtigkeit ist aber die Mehrfachkorrelation bisher theoretisch nur wenig behandelt worden. Die Schriften und Arbeiten, die sich mit ihr befassen [1]), beschränken sich, soviel ich sehe, durchweg auf die Wiedergabe des nach der Methode der kleinsten Quadrate von Pearson und Yule aufgebauten Verfahrens zur Berechnung »partieller« Korrellations- und Regressionskoeffizienten. Dieses Verfahren hat praktisch manche Vorteile; durch die schrittweise Errechnung der Koeffizienten geht aber der Ueberblick über die inneren Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Maßzahlen verloren. Es ist daher wohl nicht unnütz, diese Zusammenhänge im folgenden formelmäßig darzustellen. Anschließend will ich dann noch auf die sowohl für geophysikalische und meteorologische Probleme als auch für viele volkswirtschaftliche und soziologische Untersuchungen wichtige Bestimmung des prozentualen Beitrags jeder einzelnen von n Veränderlichen zu den Schwankungen einer mit ihnen stochastisch verbundenen $(n+1)$-ten Veränderlichen eingehen.

1. Definitionen und Bezeichnungen. Wir bezeichnen die verschiedenen zufälligen Veränderlichen mit $X_0, X_1, X_2 \ldots X_n$. Die Wahrscheinlichkeit (abgekürzt: W), daß die Veränderliche X_0 einen bestimmten Wert $X_{0,i}$ ihrer möglichen Werte annehme, sei p_i, die W., daß X_1 den Wert $X_{1,j}$ annehme, $'p_j$, die W., daß X_2 den Wert $X_{2,k}$ annehme, $''p_k$ usw. Die W., daß bei zwei zusammengehörenden Werten von X_0 und X_1 die Veränderliche $X_0 = X_{0,i}$ und $X_1 = X_{1,j}$, sei mit $w_{i,j}$, die W., daß $X_0 = X_{0,i}$ mit $X_1 = X_{1,j}$ und $X_2 = X_{2,k}$ zusammentreffe, sei mit $w_{i\,|j|\,k}$ bezeichnet. Endlich wollen wir für die bedingte W., daß X_0 den Wert $X_{0,i}$ annehme, wenn $X_1 = X_{1,j}$, $p_i^{(j)}$, für die bedingte W., daß X_1 den Wert $X_{1,j}$ annehme, wenn $X_0 = X_{0,i}$ und $X_2 = X_{2,k}$, $'p_j^{(i,k)}$ schreiben. Dann ist nach dem Multiplikationssatz der W.-Rechnung für bedingte (relative) Wn.

$$w_{i\,|j} = p_i \cdot {}'p_j^{(i)} = p_i^{(j)} \cdot {}'p_j\,, \qquad w_{i\,|j|\,k} = p_i\,{}'p_j^{(i)}\,{}''p_k^{(i,j)} = {}'p_j\,p_i^{(j)}\,{}''p_k^{(j,i)} = {}''p_k\,p_i^{(k)}\,{}'p_j^{(k,i)}$$

$$w_{i|j|k|l\ldots|z} = p_i^{(j,k,l\ldots z)} \cdot w_{j|k|l\ldots|z}\,.$$

Die mathematische Erwartung von X_a bezeichnen wir mit $\mathsf{E}(X_a)$, die Streuung mit σ_a, die Abweichung eines Wertes $X_{a,z}$ von der math. Erw. mit $x^a{}_{,z}$. Es ist folglich

$$\mathsf{E}(X_0) = \sum_i p_i X_{0,i}\,, \quad \mathsf{E}(X_1) = \sum_j {}'p_j X_{1,j} \text{ usw.}; \qquad \sigma_0{}^2 = \sum_i p_i [X_{0,i} - \mathsf{E}(X_0)]^2 = \sum_i p_i x_{0i}{}^2 \text{ usw.}$$

Ferner führen wir folgende Parameter ein:

$$m_a = \mathsf{E}(X_a)\,, \qquad m_{ab} = \mathsf{E}(X_a \cdot X_b)\,, \qquad m_{aa} = \mathsf{E}(X_a{}^2) \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\mu_a = \mathsf{E}(x_a)\,, \qquad \mu_{ab} = \mathsf{E}(x_a \cdot x_b)\,, \qquad \mu_{aa} = \mathsf{E}(x_a{}^2) \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

$$r_{ab} = \frac{\mu_{ab}}{\sigma_a \sigma_b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

Definitionsgemäß ist $\mu_{aa} = \sigma_a{}^2$ und $\mu_a = 0$; ferner $m_{ab} = m_{ba}$, $\mu_{ab} = \mu_{ba}$, $r_{ab} = r_{ba}$. Die r-Parameter sind nichts anderes als die als »Korrelationskoeffizienten« bekannten Maßzahlen.

Die Gesamtheit der Werte, welche die Veränderliche X_a annehmen kann, wenn die Veränderliche X_b einen bestimmten unter ihren möglichen Werten hat, und die Gesamtheit der den verschiedenen Werten von X_a unter dieser Voraussetzung zukommenden Wn. nennen wir das bedingte Verteilungsgesetz von X_a für den betreffenden Wert

---

[1]) Zum Beispiel: G. Udny Yule »An introduction to the theory of statistics« oder Em. Czuber »Die statistischen Forschungsmethoden«. A. Tschuprow behandelt in »Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie« ausschließlich die stochastische Verbundenheit von nur zwei Veränderlichen

von X_b. Werden auf der Grundlage des bedingten Verteilungsgesetzes die math. Erw. und die Streuung von X_a berechnet, so werden sie als die bedingte mathematische Erwartung und die bedingte Streuung bezeichnet. Wir machen diese ebenso wie die bedingten Wn. dadurch kenntlich, daß wir rechts oben in Klammern auf den bedingenden Wert von X_b hinweisen.

Wird die bedingte math. Erw. von X_a als Funktion des bedingenden Wertes von X_b dargestellt, so nennt man den betreffenden analytischen Ausdruck die Beziehungsgleichung (Regressionsgleichung) von X_a in bezug auf X_b. Im Falle der Mehrfachkorrelation, d. h. wenn mehr als zwei Veränderliche in stochastischer Abhängigkeit stehen, wird unter Beziehungsgleichung der analytische Ausdruck verstanden, durch den die bedingte math. Erw. einer der Veränderlichen als Funktion der bedingenden Werte aller übrigen Veränderlichen dargestellt wird. Bei vier stochastisch verbundenen Veränderlichen hat man also ein System von vier Beziehungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\mathsf{E}^{(j,k,l)}(X_0) = f(X_{1,j}, X_{2,k}, X_{3,l}), & \text{die Beziehungs-Gl. von } X_0 & \text{in bezug auf } X_1, X_2 \text{ und } X_3 \\
\mathsf{E}^{(i,k,l)}(X_1) = \varphi(X_{0,i}, X_{2,k}, X_{3,l}), & \text{» » » } X_1 & \text{» » » } X_0, X_2 \text{ » } X_3 \\
\mathsf{E}^{(i,j,l)}(X_2) = \chi(X_{0,i}, X_{1,j}, X_{3,l}), & \text{» » » } X_2 & \text{» » » } X_0, X_1 \text{ » } X_3 \\
\mathsf{E}^{(i,j,k)}(X_3) = \psi(X_{0,i}, X_{1,j}, X_{2,k}), & \text{» » » } X_3 & \text{» » » } X_0, X_1 \text{ » } X_2
\end{array}\right\} \quad (4).$$

Sind die Funktionen f, φ, χ usw. sämtlich linear, so nennen wir ihre Gesamtheit ein lineares Beziehungsgleichungssystem. Mit solchen wollen wir uns im folgenden ausschließlich beschäftigen. Es muß aber ausdrücklich betont werden, daß aus der Linearität einer der Beziehungsgleichungen noch nicht die Linearität der übrigen, zum gleichen System gehörigen Beziehungsgleichungen folgt. Hierin liegt ein grundlegender Unterschied gegenüber linearen funktionellen Znsammenhängen. Er hat seinen Grund darin, daß in einem System von n zusammengehörigen Beziehungsgleichungen nicht n Größen, sondern $2n$ Größen verbunden werden, in den vier Beziehungsgleichungen (4) z. B. außer den vier unabhängigen Veränderlichen X_0, X_1, X_2 und X_3, von denen in jeder Beziehungsgleichung nur drei vorkommen, auch noch die vier abhängigen Veränderlichen $\mathsf{E}^{()}(X_0)$, $\mathsf{E}^{()}(X_1)$, $\mathsf{E}^{()}(X_2)$ und $\mathsf{E}^{()}(X_3)$. Darum können auch aus einer Beziehungsgleichung durch keinerlei mathematische Künste die übrigen zum gleichen System gehörigen Beziehungsgleichungen gewonnen werden, sondern jede muß für sich aus dem Abhängigkeitsgesetz abgeleitet werden.

2. Das apriorische lineare Beziehungsgleichungssystem. I. Wir sprechen von einem apriorischen Abhängigkeitsgesetz, wenn die darin auftretenden Wn. »apriorische« im Sinne der W.-Rechnung sind, wenn also der Gesamtumfang aller Verwirklichungsmöglichkeiten mit den Teilumfängen des Vorkommens der einzelnen möglichen Werte und ihrer Kombinationen zahlenmäßig genau verglichen werden kann. Ein solches apriorisches Abhängigkeitsgesetz liegt z. B. bei einem »idealisierten« Würfelspiel von 4 Würfeln vor, bei welchem eine so genaue Ausführung der Würfel vorausgesetzt ist, daß bei allen Würfeln die W., daß eine Eins oder eine Zwei usw. fällt, gleich groß ist, wenn also für alle Würfel gilt

$$\lim_{N\to\infty}\frac{n_1}{N} = \lim_{N\to\infty}\frac{n_2}{N} = \ldots \lim_{N\to\infty}\frac{n_6}{N} = \frac{1}{6}.$$

Die Augensumme X_0 der 4 Würfel, sagen wir eines schwarzen, eines weißen, eines roten und eines blauen, steht in stochastischer Verbundenheit mit der Augenzahl X_1 des schwarzen, der Augenzahl X_2 des weißen und der Augenzahl X_3 des roten Würfels; denn X_0 ist zwar von X_1, X_2 und X_3 abhängig, bleibt aber doch nach Festlegung eines Wertes $X_{1,j}$ für X_1, eines Wertes $X_{2,k}$ für X_2 und eines Wertes $X_{3,l}$ für X_3 eine zufällige Veränderliche, die verschiedene Werte mit bestimmten Wn. annehmen kann. Ist z. B. $X_1 = 4$, $X_2 = 5$, $X_3 = 6$, so kann X_0 nicht größer als 21 und nicht kleiner als 16 sein, aber es kann mit gleicher W. von $^1/_6$ die Werte 16, 17, 18, 19, 20 und 21 haben.

Die aus einem apriorischen Abhängigkeitsgesetz sich ergebenden Beziehungsgleichungen nennen wir apriorische Beziehungsgleichungen. Das zwischen der Augensumme von vier idealen Würfeln und der Augenzahl eines jeden einzelnen von dreien derselben bestehende Abhängigkeitsgesetz liefert ein apriorisches lineares Beziehungsgleichungssystem. Wie leicht einzusehen, lautet es:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathsf{E}^{(j,k,l)}(X_0) = 3{,}5 + X_{1,j} + X_{2,k} + X_{3,l}, & \mathsf{E}^{(i,k,l)}(X_1) = {}^1/_2\,(X_{0,i} - X_{2,k} - X_{3,l}) \\
\mathsf{E}^{(i,j,l)}(X_2) = {}^1/_2\,(X_{0,i} - X_{1,j} - X_{3,l}), & \mathsf{E}^{(i,j,k)}(X_3) = {}^1/_2\,(X_{0,i} - X_{1,j} - X_{2,k})
\end{array}\right\} \quad (5).$$

Die bedingte Streuung $\sigma^{(j,k,l)}$ von X_0 ist für alle Werte von X_1, X_2 und X_3 immer gleich, nämlich $\sqrt{35/12}$. Nach der von Pearson für die stochastische Verbundenheit von zwei Veränderlichen eingeführten Terminologie können wir daher die Verbundenheit von X_0 mit X_1, X_2 und X_3 in dem Würfelbeispiele als homoskedastisch bezeichnen. Dagegen ist die bedingte Streuung von X_1 bzw. X_2 bzw. X_3 durchaus nicht für alle Werte der bedingenden Veränderlichen gleich. So ist z. B. für $X_0 = 4$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ die bedingte Streuung von X_1 gleich 0, weil X_1 in diesem Falle nur den Wert 1 haben kann; bei $X_0 = 5$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ kann aber X_1 mit gleicher W. sowohl den Wert 1 als auch den Wert 2 haben, die bedingte Streuung ist hier also $^1/_2$; bei $X_0 = 12$, $X_2 = 3$, $X_3 = 2$ kann X_1 mit gleichen Wn. alle 6 Werte haben, deren es überhaupt fähig ist, so daß bei dieser Wertverbindung $\sigma_1^{(i,k,l)} = \sqrt{35/12}$. Die Verbundenheit von X_1 mit X_0, X_2 und X_3 und ebenso die von X_2 bzw. X_3 mit den drei anderen Veränderlichen ist in dem Würfelbeispiel also heteroskedastisch.

II. Für $n+1$ Veränderliche lauten die Gleichungen des linearen Beziehungsgleichungssystems:

$$\left.\begin{aligned}
\mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(X_0) &= \alpha_{0\cdot 123\ldots n} + \alpha_{01\cdot 23\ldots n} X_{1,j} + \alpha_{02\cdot 13\ldots n} X_{2,k} + \\
&\qquad + \ldots \alpha_{0\,n\cdot 12\ldots(n-1)} X_{n,z} \\
\mathsf{E}^{(i,k,l\ldots z)}(X_1) &= \alpha_{1\cdot 023\ldots n} + \alpha_{10\cdot 23\ldots n} X_{0,i} + \alpha_{12\cdot 03\ldots n} X_{2,k} + \\
&\qquad + \ldots \alpha_{1\,n\cdot 02\ldots(n-1)} X_{n,z} \\
&\vdots \\
\mathsf{E}^{(i,j,k\ldots y)}(X_n) &= \alpha_{n\cdot 012\ldots(n-1)} + \alpha_{n0\cdot 12\ldots(n-1)} X_{0,i} + \alpha_{n1\cdot 02\ldots(n-1)} X_{1,j} + \\
&\qquad + \ldots \alpha_{n(n-1)\cdot 01\ldots(n-2)} X_{n-1,y}
\end{aligned}\right\} \qquad (6).$$

Die Bildungsweise der Zeiger (Indizes) der Koeffizienten α ist wohl ohne weiteres verständlich. Der Punkt trennt die Zahlen des Zeigers in einen linken Teil, Primärzeiger, und einen rechten Teil, Sekundärzeiger, ab. Die Ordnung der Zahlen im Sekundärzeiger ist ohne Belang, weshalb sie einfach in der natürlichen Reihenfolge angeschrieben sind; dagegen dürfen die beiden Zahlen des Primärzeigers nicht miteinander vertauscht werden.

Die Koeffizienten α lassen sich sämtlich durch die in Abschn. 1 definierten m-Parameter darstellen. Multipliziert man nämlich die erste der Gleichungen (6) beiderseits einmal mit $w_{j|k|l\ldots|z}$, ein zweites Mal mit $w_{j|k|l\ldots|z} \cdot X_{1,j}$, ein drittes Mal mit $w_{j|k|l\ldots|z} \cdot X_{2,k}$ . . . . ein $(n+1)$-tes Mal mit $w_{j|k|l\ldots|z} \cdot X_{n,z}$ und summiert jeweils über alle $j, k, l \ldots z$, so erhält man, da $\mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(X_0) = \sum_i p_i^{(j,k,l\ldots z)} X_{0,i}$ unter Berücksichtigung der Definitionen (1) folgende $n+1$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \alpha_{0\cdot 123\ldots n} \cdot 1 + \alpha_{01\cdot 23\ldots n} \cdot m_1 + \alpha_{02\cdot 13\ldots n}\, m_2 + \cdots \alpha_{0\,n\,12\ldots(n-1)} m_n \\
m_{01} &= \alpha_{0\cdot 123\ldots n} \cdot m_1 + \alpha_{01\cdot 23\ldots n} \cdot m_{11} + \alpha_{02\cdot 13\ldots n}\, m_{12} + \cdots \alpha_{0\,n\cdot 12\ldots(n-1)} m_{1\,n} \\
&\vdots \\
m_{0\,n} &= \alpha_{0\cdot 123\ldots n} \cdot m_n + \alpha_{01\cdot 23\ldots n} \cdot m_{1\,n} + \alpha_{02\cdot 13\ldots n}\, m_{2\,n} + \cdots \alpha_{0\,n\cdot 12\ldots(n-1)} m_{n\,n} .
\end{aligned}$$

Daher ist

$$\alpha_{0\cdot 123\ldots n} = \frac{\begin{vmatrix} m_0 & m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_{01} & m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1\,n} \\ m_{02} & m_{12} & m_{22} & \ldots & m_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{0\,n} & m_{1\,n} & m_{2\,n} & \ldots & m_{n\,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1 & m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1\,n} \\ m_2 & m_{12} & m_{22} & \ldots & m_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & m_{1\,n} & m_{2\,n} & \ldots & m_{n\,n} \end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad \alpha_{0\,s\cdot 12\ldots n} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m_1 & \ldots & m_0 & m_{s+1} & \ldots & m_n \\ m_1 & m_{11} & \ldots & m_{01} & m_{1(s+1)} & \ldots & m_{1\,n} \\ m_2 & m_{12} & \ldots & m_{02} & m_{2(s+1)} & \ldots & m_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & m_{1\,n} & \ldots & m_{0\,n} & m_{(s+1)\,n} & \ldots & m_{n\,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1 & m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1\,n} \\ m_2 & m_{12} & m_{22} & \ldots & m_{2\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_n & m_{1\,n} & m_{2\,n} & \ldots & m_{n\,n} \end{vmatrix}} \qquad (7).$$

In analoger Weise lassen sich durch Multiplikation der zweiten der Gleichungen (6) mit $w_{i|k|l\ldots|z}$, dann mit $w_{i|k|l\ldots|z} \cdot X_{0,i}$ usw. und Summation über alle $i, k, l \ldots z$ die Koeffizienten $\alpha_{1\cdot 023\ldots n}$, $\alpha_{10\cdot 23\ldots n}$ usw. und in entsprechender Weise auch alle übrigen α des Beziehungsgleichungssystems (6) als Quotienten von Determinanten darstellen, deren Elemente aus lauter m-Parametern bestehen.

III. **Sehr häufig, besonders bei geophysikalischen und meteorologischen Aufgaben, ist es zweckmäßiger, statt die bedingte math. Erw. von X_a als Funktion von X_b, X_c usw. darzustellen, der Beziehungsgleichung eine solche Gestalt zu geben, daß die Abweichung der bedingten math. Erw. von der nicht-bedingten math. Erw. von X_a als Funktion der Abweichungen der bedingenden Werte von den zugehörigen math. Erwn. erscheint. Das lineare Beziehungsgleichungssystem hat dann die Form**

$$\left.\begin{aligned}
\mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(X_0) - \mathsf{E}(X_0) = \mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(x_0) &= \beta_{0\ 123\ldots n}\ \ + \beta_{01\cdot 23\ldots n}\ \ x_{1,j} + \\
&\quad + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\ \ x_{n,z} \\
\mathsf{E}^{(i,k,l\ldots z)}(X_1) - \mathsf{E}(X_1) = \mathsf{E}^{(i,k,l\ldots z)}(x_1) &= \beta_{1\cdot 023\ldots n}\ \ + \beta_{10\cdot 23\ldots n}\ \ x_{0,i} + \\
&\quad + \cdots \beta_{1n\cdot 02\ldots(n-1)}\ \ x_{n,z} \\
\mathsf{E}^{(i,j,k\ldots y)}(X_n) - \mathsf{E}(X_n) = \mathsf{E}^{(i,j,k\ldots y)}(x_n) &= \beta_{n\cdot 012\ldots(n-1)} + \beta_{n0\cdot 12\ldots(n-1)}\, x_{0,i} + \\
&\quad + \cdots \beta_{n(n-1)\cdot 01\ldots(n-2)}\, x_{n-1,y}
\end{aligned}\right\} \quad (8).$$

Multiplizieren wir die erste dieser Gleichungen wieder mit $w_{j|k|l\ldots|z}$ und summieren über alle $j, k, l \ldots z$, so erhalten wir die Gleichung

$$\mu_0 = \beta_{0\cdot 123\ldots n}\cdot 1 + \beta_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_1 + \beta_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_2 + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_n\,,$$

aus der nach (2) folgt $\beta_{0\cdot 123\ldots n} = 0\,.$

Ebenso erhält man durch Multiplikation der zweiten der Gleichungen (8) mit $w_{i|k|l\ldots|z}$ und Summation über alle $i, k, l \ldots z$

$$\beta_{1\cdot 023\ldots n} = 0\,.$$

Es sind demnach die Koeffizienten aller von x freien Glieder der Gleichungen (8) gleich 0, so daß wir das lineare Beziehungsgleichungssystem in der Form schreiben können:

$$\left.\begin{aligned}
\mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(x_0) &= \beta_{01\cdot 23\ldots n}\ \ x_{1,j} + \beta_{02\cdot 13\ldots n}\ \ x_{2,k} + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\ \ x_{n,z} \\
\mathsf{E}^{(i,k,l\ldots z)}(x_1) &= \beta_{10\cdot 23\ldots n}\ \ x_{0,i} + \beta_{12\cdot 03\ldots n}\ \ x_{2,k} + \cdots \beta_{1n\cdot 02\ldots(n-1)}\ \ x_{n,z} \\
\mathsf{E}^{(i,j,k\ldots z)}(x_n) &= \beta_{n0\cdot 12\ldots(n-1)}\, x_{0,i} + \beta_{n1\cdot 02\ldots(n-1)}\, x_{1,j} + \cdots \beta_{n(n-1)\cdot 01\ldots(n-2)}\, x_{n-1,y}
\end{aligned}\right\} \quad (9).$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen einmal mit $w_{j|k|l\ldots|z}\cdot X_{1,j}$, ein zweites Mal mit $w_{j|k|l\ldots|z}\cdot X_{2,k}$ usw. und summiert jeweils über alle $j, k, l, \ldots z$, so erhält man unter Berücksichtigung der Definitionen (2) folgende n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{01} &= \beta_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{11} + \beta_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{12} + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{1n} \\
\mu_{02} &= \beta_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{12} + \beta_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{22} + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{2n} \\
&\vdots \\
\mu_{0n} &= \beta_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{1n} + \beta_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{2n} + \cdots \beta_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{nn}
\end{aligned}\right\} \quad (10\,\mathbf{a}).$$

Entsprechend erhält man durch Multiplikation der zweiten der Gleichungen (9) mit $w_{i|k|l\ldots|z}\cdot X_{0,i}$, $w_{i|k|l\ldots|z}\cdot X_{2,k}$ usw. die n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{01} &= \beta_{10\cdot 23\ldots n}\,\mu_{00} + \beta_{12\cdot 03\ldots n}\,\mu_{02} + \cdots \beta_{1n\cdot 02\ldots(n-1)}\,\mu_{0n} \\
\mu_{12} &= \beta_{10\cdot 23\ldots n}\,\mu_{02} + \beta_{12\cdot 03\ldots n}\,\mu_{22} + \cdots \beta_{1n\cdot 02\ldots(n-1)}\,\mu_{2n} \\
&\vdots \\
\mu_{1n} &= \beta_{10\cdot 23\ldots n}\,\mu_{0n} + \beta_{12\cdot 03\ldots n}\,\mu_{2n} + \cdots \beta_{1n\cdot 02\ldots(n-1)}\,\mu_{nn}
\end{aligned}\right\} \quad (10\,\mathbf{b}).$$

Wir setzen nun die Determinante

$$\begin{vmatrix}
\mu_{00} & \mu_{01} & \mu_{02} & \cdots & \mu_{0n} \\
\mu_{01} & \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\
\mu_{02} & \mu_{12} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\
\vdots & & & & \vdots \\
\mu_{0n} & \mu_{1n} & \mu_{2n} & \cdots & \mu_{nn}
\end{vmatrix} = B$$

und numerieren die Zeilen und Spalten (Kolonnen) dieser Determinante von 0 bis n derart, daß die s-te Zeile lauter Elemente enthält, in deren Zeiger überall die Zahl s vorkommt, und die t-te Spalte lauter Elemente, in deren Zeiger überall t vorkommt. Diejenige Minore, die aus der Determinante B durch Streichung der s-ten Zeile und der t-ten Spalte entsteht, bezeichnen wir mit B_{st}. Man erhält dann ganz allgemein, unter Beachtung der Regel, daß sich durch Vertauschung zweier Spalten das Vorzeichen einer Determinante ändert,

$$\beta_{st\cdot 01\cdots n} = \frac{-(-1)^{s+t}\cdot B_{st}}{B_{ss}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Im besonderen ergibt sich für die Koeffizienten der ersten der Gleichungen (9)

$$\beta_{0\,t\cdot 12\cdots n} = \frac{-(-1)^t \cdot B_{0\,t}}{B_{00}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11\,a).$$

IV. Die Beziehungsgleichungen (9) haben den großen Nachteil, daß sich namentlich bei großem n die Benennungen der Koeffizienten unter Umständen sehr verwickelt gestalten. Diesem Uebelstand kann man sehr einfach dadurch abhelfen, daß man alle x durch die zugehörigen Streuungen dividiert. Setzt man dementsprechend

$$\mathfrak{x}_{0,i} = \frac{x_{0,i}}{\sigma_0}, \quad \mathfrak{x}_{1,j} = \frac{x_{1,j}}{\sigma_1} \ . \ . \ . \ . \ \mathfrak{x}_{n,z} = \frac{x_{n,z}}{\sigma_n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12),$$

so erhält man das lineare Beziehungsgleichungssystem in folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{E}^{(j,k,l\ldots z)}(\mathfrak{x}_0) &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\ \mathfrak{x}_{1,j} + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\ \mathfrak{x}_{2,k} + \cdots \gamma_{0\,n\ 12\cdots(n-1)}\ \mathfrak{x}_{n,z} \\
\mathfrak{E}^{(i,k,l\ldots z)}(\mathfrak{x}_1) &= \gamma_{10\cdot 23\cdots n}\ \mathfrak{x}_{0,i} + \gamma_{12\cdot 03\cdots n}\ \mathfrak{x}_{2,k} + \cdots \gamma_{1\,n\cdot 02\cdots(n-1)}\ \mathfrak{x}_{n,z} \\
&\vdots \\
\mathfrak{E}^{(i,j,k\ldots y)}(\mathfrak{x}_n) &= \gamma_{n0\cdot 12\cdots(n-1)}\mathfrak{x}_{0,i} + \gamma_{n1\cdot 02\cdots(n-1)}\mathfrak{x}_{1\cdot j} + \cdots \gamma_{n(n-1)\cdot 01\cdots(n-2)}\ \mathfrak{x}_{n-1,y}
\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Gemäß (12) sind die β und γ durch die Beziehung

$$\beta_{a\,b\cdot 01\cdots n} = \frac{\sigma_a}{\sigma_b}\,\gamma_{a\,b\cdot 01\cdots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

verbunden. Setzen wir diese Werte in die Gl. (10 a) ein, so erhalten wir die n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mu_{01}}{\sigma_0} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\frac{\mu_{11}}{\sigma_1} + \gamma_{02\ 13\cdots n}\frac{\mu_{12}}{\sigma_2} + \cdots \gamma_{0\,n\cdot 12\cdots(n-1)}\frac{\mu_{1\,n}}{\sigma_n} \\
\frac{\mu_{02}}{\sigma_0} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\frac{\mu_{12}}{\sigma_1} + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\frac{\mu_{22}}{\sigma_2} + \cdots \gamma_{0\,n\cdot 12\cdots(n-1)}\frac{\mu_{2\,n}}{\sigma_n} \\
&\vdots \\
\frac{\mu_{0\,n}}{\sigma_0} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\frac{\mu_{1\,n}}{\sigma_1} + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\frac{\mu_{2\,n}}{\sigma_2} + \cdots \gamma_{0\,n\cdot 12\cdots(n-1)}\frac{\mu_{n\,n}}{\sigma_n}
\end{aligned}\right\} \quad . \ . \ (15\,a).$$

Dividieren wir nun die erste dieser n Gleichungen beiderseits mit σ_1, die zweite mit σ_2 . . ., die n^{te} mit σ_n, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Definition (3)

$$\left.\begin{aligned}
r_{01} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\cdot 1 + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\,r_{12} + \cdots \gamma_{0\,n\ 12\cdots(n-1)}\ r_{1\,n} \\
r_{02} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\,r_{12} + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\cdot 1 + \cdots \gamma_{0\,n\cdot 12\cdots(n-1)}\ r_{2\,n} \\
&\vdots \\
r_{0\,n} &= \gamma_{01\cdot 23\cdots n}\,r_{1\,n} + \gamma_{02\cdot 13\cdots n}\,r_{2\,n} + \cdots \gamma_{0\,n\cdot 12\cdots(n-1)}\cdot 1
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15\,a^*). \quad .$$

Entsprechend folgt aus (10 b)

$$\left.\begin{aligned}
r_{01} &= \gamma_{10\cdot 23\cdots n}\cdot 1 + \gamma_{12\cdot 03\cdots n}\,r_{02} + \cdots \gamma_{1\,n\ 02\cdots(n-1)}\ r_{0\,n} \\
r_{12} &= \gamma_{10\cdot 23\cdots n}\,r_{02} + \gamma_{12\cdot 03\cdots n}\cdot 1 + \cdots \gamma_{1\,n\cdot 02\cdots(n-1)}\ r_{2\,n} \\
&\vdots \\
r_{1\,n} &= \gamma_{10\cdot 23\cdots n}\,r_{0\,n} + \gamma_{12\cdot 03\cdots n}\,r_{2\,n} + \cdots \gamma_{1\,n\cdot 02\cdots(n-1)}\cdot 1
\end{aligned}\right\} \quad . \quad (15\,b^*).$$

Setzen wir nun die Determinante

$$\Gamma = \begin{vmatrix}
1 & r_{01} & r_{02} & \cdots & r_{0\,n} \\
r_{01} & 1 & r_{12} & \cdots & r_{1\,n} \\
r_{02} & r_{12} & 1 & \cdots & r_{2\,n} \\
\vdots & & & & \vdots \\
r_{0\,n} & r_{1\,n} & r_{2\,n} & \cdots & 1
\end{vmatrix}$$

numerieren die Zeilen und Spalten analog III und bezeichnen die Minore, welche durch Streichung der s-ten Zeile und der t-ten Spalte der Determinante Γ entsteht, mit Γ_{st}, so erhalten wir zur Bestimmung der Koeffizienten γ die Gleichung

$$\gamma_{s\,t\cdot 01\cdots n} = \frac{-(-1)^{s+t}\cdot \Gamma_{s\,t}}{\Gamma_{s\,s}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Für $n = 1$ ist $\Gamma = \begin{vmatrix} 1 & r_{01} \\ r_{01} & 1 \end{vmatrix}$ und daher

$$\mathfrak{E}^{(j)}(\mathfrak{x}_0) = r_{01}\cdot \mathfrak{x}_{1,j} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{E}^{(i)}(\mathfrak{x}_1) = r_{01}\cdot \mathfrak{x}_{0,i} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

3. Das lineare Beziehungsgleichungssystem von Erfahrungswerten. In der Regel handelt es sich bei der praktischen Anwendung der Korrelationsrechnung nicht um

apriorische Abhängigkeitsgesetze. Zwar ist das, was der Forscher sucht, im Grunde wohl das apriorische Gesetz, aber das, was er zu seiner Ermittlung in Rechnung stellen kann, sind meistens nur beobachtete, also aus der Erfahrung abgeleitete, relative Häufigkeiten. Erfahrungswerte werden natürlich sehr selten ein lineares Beziehungsgleichungssystem oder auch nur eine einzelne lineare Beziehungsgleichung genau erfüllen und, wenn sie es tun, besteht immer die Möglichkeit, daß schon der nächste Beobachtungswert eine Abweichung von dem linearen Abhängigkeitsgesetz bringt. Es entsteht daraus die Aufgabe, diejenige lineare Beziehungsgleichung zu finden, welche eine empirisch gegebene stochastische Beziehung einer zufälligen Veränderlichen X_0 zu mehreren anderen Veränderlichen X_1, X_2 usw. im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate »möglichst gut« wiedergibt. Diese Forderung wird von der gesuchten linearen Beziehungsgleichung dann erfüllt, wenn die Summe der Quadrate der Abweichungen der nach der linearen Gleichung berechneten bedingten math. Erwn. von den entsprechenden wahren Werten der bedingten math. Erwn. ein Minimum ist. Da die bedingten math. Erwn. bei einer aus der Erfahrung gegebenen endlichen Zahl von Beobachtungswerten arithmetische Mittel sind, so folgt aus jener Forderung die weitere, daß die Summe der Quadrate der Abweichungen λ_ν der nach der linearen Beziehungsgleichung berechneten math. Erwartungen von x_0 von den entsprechenden beobachteten x_0 ein Minimum ist.

Die zu jeder Beobachtung von X_0 gehörenden Beobachtungswerte der Veränderlichen X_1, X_2 . . . X_n bezeichnen wir einschließlich des Wertes von X_0 als eine Wertegruppe. Sind nun N solche Wertegruppen aus der Erfahrung gegeben und schreiben wir die gesuchte lineare Beziehungsgleichung, da $\Sigma x_0 = \Sigma x_1 = \ldots \Sigma x_n = 0$,

$$\mathsf{E}^{(\,)}(x_0) = b_{01\cdot 23\ldots n}\, x_1 + b_{02\cdot 13\ldots n}\, x_2 + \cdots b_{0n\ 12\ldots(n-1)}\, x_n ,$$

so bekommen wir N Fehlergleichungen von der Form

$$\lambda_\nu = -\, x_{0,\nu} + b_{01\cdot 23\ldots n}\, x_{1,\nu} + b_{02\cdot 13\ldots n}\, x_{2,\nu} + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\, x_{n,\nu} .$$

Aus der Bedingung $\sum_{\nu=1}^{\nu=N} \lambda_\nu^{\,2} = \text{Min.}$ folgen dann in bekannter Weise die n Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
b_{01\cdot 23\ldots n}\cdot \Sigma x_1^{\,2} &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\cdot \Sigma x_1 x_2 + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\, \Sigma x_1 x_n = \Sigma x_0 x_1 \\
b_{01\cdot 23\ldots n}\cdot \Sigma x_1 x_2 &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\cdot \Sigma x_2^{\,2} + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\, \Sigma x_2 x_n = \Sigma x_0 x_2 \\
&\vdots \\
b_{01\cdot 23\ldots n}\cdot \Sigma x_1 x_n &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\cdot \Sigma x_2 x_n + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\, \Sigma x_n^{\,2} = \Sigma x_0 x_n
\end{aligned}\right\} \quad (18).$$

Da aber definitionsgemäß $\Sigma x_a x_b = N \cdot \mu_{ab}$, so gehen die Gl. (18) nach Division durch N über in

$$\left.\begin{aligned}
b_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{11} &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{12} + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{1n} = \mu_{01} \\
b_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{12} &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{22} + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{2n} = \mu_{02} \\
&\vdots \\
b_{01\cdot 23\ldots n}\,\mu_{1n} &+ b_{02\cdot 13\ldots n}\,\mu_{2n} + \cdots b_{0n\cdot 12\ldots(n-1)}\,\mu_{nn} = \mu_{0n}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (19).$$

Vergleichen wir das Gleichungssystem (19) mit dem Gleichungssystem (10a), so erkennen wir, daß

$$b_{0t\cdot 12\ldots n} = \beta_{0t\cdot 12\ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20\,\mathrm{a}).$$

Daraus ergibt sich der wichtige Satz:

Die Gleichung $\mathsf{E}^{(j,k,l\ldots z)}(x_0) = \frac{B_{01}}{B_{00}}\, x_{1,j} - \frac{B_{02}}{B_{00}}\, x_{2,k} + \cdots + \frac{-(-1)^n B_{0n}}{B_{00}}\, x_{n,z}$ ist die wahre Beziehungsgleichung von x_0 in bezug auf x_1, x_2 . . . x_n, wenn die stochastische Beziehung von x_0 zu x_1, x_2 . . . x_n eine lineare ist; ist aber diese Beziehung keine lineare, so stellt jene Gleichung die bedingte math. Erw. $\mathsf{E}^{(\,)}(x_0) = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ besser als jede andere lineare Beziehungsgleichung dar.

Führt man die gleichen Betrachtungen für die übrigen Gleichungen des Systems (9) durch, so erhält man ganz allgemein

$$b_{st\cdot 01\ldots n} = \beta_{st\cdot 01\ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20).$$

4. Der totale Korrelationskoeffizient. Das Maß der Schwankung von X_0 ist ohne Berücksichtigung des stochastischen Zusammenhanges von X_0 mit $X_1, X_2 \ldots X_n$ $\sigma_0^{\,2}$, bei Berücksichtigung dieses Zusammenhanges jedoch $(\sigma_0^{(j,k,l\ldots z)})^2$. Das Maß der durchschnittlichen Schwankung der nach der Festlegung der Werte von X_1, X_2 . . . X_n möglich bleibenden Werte von X_0 um die jeweilige bedingte math. Erw. ist infolgedessen

$$\sum_j \sum_k \sum_l \ldots \sum_z w_{j|k|l|\ldots|z}\, (\sigma_0^{(j,k,l\ldots z)})^2 .$$

Das von Pearson als Maß für die Strammheit der stochastischen Verbundenheit von zwei Veränderlichen aufgestellte Korrelationsverhältnis

$$\eta^2_{x_0|x_1} = 1 - \frac{1}{{\sigma_0}^2} \Sigma' p_j \left[\sigma_0^{(j)}\right]^2$$

wird daher sinngemäß für mehr als zwei Veränderliche folgendermaßen geschrieben:

$$\eta^2_{x_0|x_1, x_2 \ldots x_n} = 1 - \frac{1}{{\sigma_0}^2} \Sigma_j \Sigma_k \Sigma_l \ldots \Sigma_z w_{j|k|l|\ldots|z} \left[\sigma_0^{(j,k,l \ldots z)}\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Je kleiner $\Sigma \Sigma \Sigma \ldots \Sigma w_{j|k\,l\ldots|z}\ (\sigma_0^{(\,)})^2$ gegenüber dem Quadrat ${\sigma_0}^2$ der Gesamtstreuung, desto sicherer ist die Abschätzung von X_0 auf Grund der Beziehungsgleichung, desto mehr nähert sich die Aussage (Voraussage) über den zu erwartenden Wert von X_0 der Vorausberechnung von X_0 im Falle eines funktionellen Zusammenhanges. Steht X_0 im funktionellen Zusammenhang mit X_1, $X_2 \ldots X_n$, so sind alle bedingten Streuungen $\sigma_0^{(\,)}$ gleich 0, das Korrelationsverhältnis wird dann 1.

Entsprechend kann man nun

$$R^2_{0.12\ldots n} = 1 - \frac{\frac{\Sigma \lambda \lambda}{N}}{{\sigma_0}^2} = 1 - \frac{\Sigma \lambda \lambda}{\Sigma {x_0}^2} = 1 - f^2_{0.12\ldots n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

als Maßzahl dafür aufstellen, inwieweit für gegebene Größen X_0, $X_1, \ldots X_n$ durch die Bindung an eine lineare Beziehungsgleichung eine Verringerung der Streuung von X_0 erzielt werden kann. Ist die stochastische Beziehung von X_0 zu X_1, $X_2 \ldots X_n$ eine lineare, so ist $R^2_{0.12\ldots n} = \eta^2_{x_0|x_1, x_2 \ldots x_n}$ und daher unmittelbar ein Maß für die Strammheit der stochastischen Verbundenheit. Dies gilt natürlich genau nur für apriorische Abhängigkeitsgesetze; im Falle empirisch gewonnener R^2 müssen erst die Fehler abgeschätzt werden, die begangen werden, wenn die ermittelten empirischen Maßzahlen den gesuchten apriorischen gleichgesetzt werden.

Die Maßzahl R wird als totaler Korrelationskoeffizient bezeichnet. Es ist ungünstig, daß diese Bezeichnung für R und nicht für R^2 gewählt wurde; denn die eigentliche Maßzahl ist ja R^2 und nicht R. Der Grund für die Wahl liegt darin, daß im Falle von nur zwei Veränderlichen ($n = 1$) R in r übergeht und daß aus dem Vorzeichen von r geschlossen werden kann, ob die bedingte math. Erw. von X_0 mit der Zunahme von X_1 im Durchschnitt zu- oder abnimmt. Für $n > 1$ hat aber R kein Vorzeichen, sondern ist eine absolute Zahl.

Quadriert und addiert man die N Fehlergleichungen

$$\lambda_\nu = -\, x_{0,\nu} + b_{01\,.\,23\ldots n}\, x_{1,\nu} + b_{02\,.\,13\ldots n}\, x_{2,\nu} + \ldots\ b_{0n\,.\,12\ldots(n-1)}\, x_{n,\nu}$$

und setzt für die Koeffizienten b die ihnen gemäß den Gleichungen (20a) und (11a) zukommenden Werte ein, so erhält man

$$\Sigma \lambda \lambda = \Sigma \left(\frac{B_{01}}{B_{00}} x_1 - \frac{B_{02}}{B_{00}} x_2 + \ldots \frac{-(-1)^n B_{0n}}{B_{00}} x_n - x_0 \right)^2.$$

Daraus folgt durch Division mit N

$$\frac{\Sigma \lambda \lambda}{N} = \frac{{B_{01}}^2}{{B_{00}}^2} \mu_{11} + \frac{{B_{02}}^2}{{B_{00}}^2} \mu_{22} + \ldots + \frac{{B_{0n}}^2}{{B_{00}}^2} + \frac{B_{00}}{B_{00}} \mu_{00} - 2 \frac{B_{01}}{B_{00}} \mu_{01}$$
$$+ 2 \frac{B_{02}}{B_{00}} \mu_{02} - \ldots + 2 \cdot \frac{(-1)^n B_{0n}}{B_{00}} \mu_{0n} + \Sigma_{a \neq b} 2 \cdot \frac{(-1)^{a+b} B_{0a} B_{0b}}{{B_{00}}^2} \mu_{ab}.$$

Da aber nach den Adjunktensätzen der Determinantentheorie

$$B_{00} \mu_{1s} - B_{01} \mu_{1s} + \ldots + (-1)^n B_{0n} \mu_{ns} = 0$$

und

$$B_{00} \mu_{00} - B_{01} \mu_{01} + \ldots + (-1)^n B_{0n} \mu_{0n} = B,$$

so ist

$$\frac{\Sigma \lambda \lambda}{N} = \frac{B}{B_{00}}.$$

Setzt man diesen Wert in die Definitionsgleichung (22) ein, so erhält man

$$f^2_{0.12\ldots n} = \frac{B}{B_{00} \cdot {\sigma_0}^2} \quad \text{und} \quad R^2_{0.12\ldots n} = 1 - \frac{B}{B_{00} \cdot {\sigma_0}^2}.$$

Da nach (14) und (16)

$$\frac{\Gamma_{0t}}{\Gamma_{00}} = \frac{\sigma_t}{\sigma_0} \frac{B_{0t}}{B_{00}} = \frac{\mu_{0t}}{{\sigma_0}^2 \cdot r_{0t}} \frac{B_{0t}}{B_{00}}$$

und da ferner $\quad \Gamma_{00} - \Gamma_{01}\, r_{01} + \ldots + (-1)^n\, \Gamma_{0n}\, r_{0n} = \Gamma\,,$
so ergibt sich weiterhin

$$f^2_{0.12\ldots n} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{00}} \quad \text{und} \quad R^2_{0.12\ldots n} = 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{00}}$$

oder allgemein:

$$\underline{\underline{f^2_{t.01\ldots n} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{tt}}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{R^2_{t.01\ldots n} = 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{tt}}}} \qquad \ldots\ldots \quad (23).$$

Aus (23) geht hervor, daß nur dann $R_{0\ 12\ldots n} = R_{1.02\ldots n} = \cdots = R_{n\ 01\ldots(n-1)}$, wenn

$$\Gamma_{00} = \Gamma_{11} = \ldots = \Gamma_{nn}\,.$$

Sind die Veränderlichen $X_1, X_2 \ldots X_n$ unter sich »nicht-korreliert«, so daß $r_{12} = r_{13} = \ldots = r_{1n} = r_{23} = \ldots\ r_{ab} = \ldots = r_{(n-1)} = 0 \quad (a \neq b,\ a \neq 0,\ b \neq 0)$, so ist $\Gamma_{00} = 1$ und $\Gamma = 1 - r_{01}{}^2 - r_{02}{}^2 - \ldots - r_{0n}{}^2$, so daß in diesem Sonderfalle

$$R^2_{0.12\ldots n} = r_{01}{}^2 + r_{02}{}^2 + \ldots + r_{0n}{}^2 = \sum_{n=1}^{n} r_{0n}{}^2 \qquad \ldots\ldots \quad (24).$$

5. Der Beitrag jeder einzelnen von n zufälligen Veränderlichen zu den Schwankungen der mit ihnen stochastisch verbundenen $(n+1)$-ten Veränderlichen. Bei einem Spiel von vier idealen Würfeln ist der Korrelationskoeffizient der Augensumme X_0 der vier Würfel mit der Augenzahl X_a eines der vier Würfel, wie sich leicht zeigen läßt, $r_{0a} = 0{,}50$. Daher ist $r_{01}{}^2 = r_{02}{}^2 = r_{03}{}^2 = r_{04}{}^2 = 0{,}25$. Andererseits sind aber die Augenzahlen der einzelnen Würfel voneinander unabhängig, daher $r_{12} = r_{13} = r_{14} = r_{23} = r_{24} = r_{34} = 0$. Nach (24) ist infolgedessen

$R^2_{0.12} = r_{01}{}^2 + r_{02}{}^2 = 0{,}50$ — das Quadrat des totalen Kkf. der Augensumme der 4 Würfel mit d. Augenzahlen von zweien derselben

$R^2_{0.123} = r_{01}{}^2 + r_{02}{}^2 + r_{03}{}^2 = 0{,}75$ — das Quadrat des totalen Kkf. der Augensumme der 4 Würfel mit d. Augenzahlen von dreien derselben

$R^2_{0.1234} = r_{01}{}^2 + r_{02}{}^2 + r_{03}{}^2 + r_{04}{}^2 = 1{,}0$ — das Quadrat des totalen Kkf. der Augensumme der 4 Würfel mit den Augenzahlen dieser 4 Würfel.

Die Augensumme von 4 idealen Würfeln wird im Durchschnitt zu einem Viertel von je einem Würfel, zur Hälfte von 2, zu $^3/_4$ von 3 Würfeln und ganz von allen 4 Würfeln bestimmt. Genau dieselben Verhältniszahlen liefern die Quadrate $r_{01}{}^2$, $R^2_{0.12}$, $R^2_{0.123}$, $R^2_{0.1234}$. Wir sehen daraus: Ist X_0 mit $X_1, X_2 \ldots X_n$ linear stochastisch verbunden und sind $X_1, X_2 \ldots X_n$ unter sich nicht-korreliert, so geben die Quadrate der Kkfn. an, zu welchem Bruchteil der Schwankungen von X_0 jede einzelne Veränderliche beiträgt, und das Quadrat des totalen Kkf. gibt an, zu welchem Bruchteil die Gesamtheit der in Beziehung gesetzten Veränderlichen beiträgt

Wir wollen nun die Aufgabe lösen, Maßzahlen aufzustellen, die allgemein — ohne die Voraussetzung der gegenseitigen Unabhängigkeit der Veränderlichen $X_1, X_2 \ldots X_n$ — für apriorische lineare Beziehungsgleichungssysteme angeben, welcher Bruchteil der Schwankungen der einen Veränderlichen durch jede einzelne der übrigen Veränderlichen bestimmt wird. Hierzu gehen wir von der ersten Gleichung des Beziehungsgleichungssystems (13) aus, die wir auch in der Form schreiben können

$$\mathfrak{X}_0 = \gamma_{01.23\ldots n}\, \mathfrak{X}_1 + \gamma_{02.13\ \ldots n}\, \mathfrak{X}_2 + \ldots \gamma_{0n.12\ldots(n-1)}\, \mathfrak{X}_n + \delta \qquad \ldots \quad (25),$$

wobei $\mathsf{E}(\delta)$ für die Gesamtheit aller möglichen Wertekombinationen von $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}_1 \ldots \mathfrak{X}_n$ gleich 0 ist. Ebenso können wir nach (17) setzen:

$$\mathfrak{X}_1 = r_{01}\, \mathfrak{X}_0 + \varepsilon\,, \qquad \mathfrak{X}_2 = r_{02}\, \mathfrak{X}_0 + \zeta \ \ldots\ \mathfrak{X}_n = r_{0n}\, \mathfrak{X}_0 + \omega\,,$$

wobei wiederum $\mathsf{E}(\varepsilon) = \mathsf{E}(\zeta) = \mathsf{E}(\omega) = 0$. Setzen wir diese Werte in (25) ein, so erhalten wir

$$\mathfrak{X}_0 = r_{01} \cdot \gamma_{01.23\ldots n}\, \mathfrak{X}_0 + r_{02} \cdot \gamma_{02.13\ldots n}\, \mathfrak{X}_0 + \cdots\ r_{0n}\, \gamma_{0n.12\ldots(n-1)}\, \mathfrak{X}_0 + H_0 \qquad (26).$$

Die Produkte $r\,\gamma$ bezeichnen wir mit C, so daß

$$C_{0t.12\ldots n} = r_{0t} \cdot \gamma_{0t.12\ldots n} = r_{0t} \cdot \frac{-(-1)^t \cdot \Gamma_{0t}}{\Gamma_{00}}\,.$$

Da $\Gamma = \Gamma_{00} - r_{01}\, \Gamma_{01} + r_{02}\, \Gamma_{02} - \cdots + (-1)^n\, r_{0n}\, \Gamma_{0n}$, so ist

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_{00}} = 1 - r_{01}\, \frac{\Gamma_{01}}{\Gamma_{00}} + r_{02}\, \frac{\Gamma_{02}}{\Gamma_{00}} - \cdots + (-1)\, r_{0n}\, \frac{\Gamma_{0n}}{\Gamma_{00}} = 1 - \sum_{t=1}^{t=n} C_{0t.12\ldots n}$$

oder $$\sum_{t=1}^{t=n} C_{0\,t\cdot 12\ldots n} = 1 - \frac{\Gamma}{\Gamma_{00}}.$$

Nach (23) ist somit $\sum_{t=1}^{t=n} C_{0\,t\cdot 12\ldots n} = R^2_{0\,.\,12\ldots n}$ oder allgemein

$$\underline{\underline{\sum_{t=1}^{t=n} C_{s\,t\,.\,01\ldots n} = R^2_{s\,.\,01\ldots n}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27).$$

Daraus folgt, daß $$H_0 = f^2_{0\,.\,12\ldots n}\cdot \mathfrak{X}_0\,.$$

Aus Gl. (26) ersehen wir daher, daß — falls $R^2_{0\,.\,12\ldots n}$ sehr nahe 1, $f^2_{0\,.\,12\ldots n}$ und H_0 also sehr nahe 0 sind — im Durchschnitt aller Wertekombinationen der X_0, X_1 . . . X_n $\mathfrak{X}_0$ zu $\frac{|C_{0\,t\ 12\ldots n}|}{\sum\limits_t |C_{0\,t\,.\,12\ldots n}|}$ Teilen durch $\mathfrak{X}_t$ bzw. natürlich in demselben Anteilverhältnis X_0 durch X_t bestimmt wird. Sind die C alle positiv, so gibt $C_{0\,t\,.\,12\,.\,.n}$ unmittelbar den Anteil der Veränderlichen X_t an den Schwankungen von X_0 an.

Ist $R^2_{0\,.\,12\ldots n}$ nicht nahezu 1, so ist der Anteil $P_{0\,t}$ der Veränderlichen X_t an den Schwankungen von X_0, wenn die in der Beziehungsgleichung nicht mitenthaltenen (unbekannten) Einflüsse auf X_0 von den Veränderlichen $X_1, X_2 \ldots X_n$ unabhängig sind,

$$P_{0\,t} = \frac{|C_{0\,t\,.\,12\ldots n}|}{\sum\limits_t |C_{0\,t\,.\,12\ldots n}| + f^2_{0\,.\,12\ldots n}}.$$

Sind die C alle positiv, so wird wieder $P_{0\,t} = C_{0\,t\,.\,12\ldots n}$.

Sind die in $f^2_{0\,.\,12\ldots n}$ noch steckenden (unbekannten) Einflüsse möglicherweise mit den Veränderlichen $X_1 \ldots X_n$ stochastisch verbunden, so lassen sich die Anteile nicht genau angeben, solange nicht auch jene Einflüsse zahlenmäßig bekannt sind und mit in die Beziehungsgleichung aufgenommen werden können. Man kann aber sagen: »nach dem augenblicklichen Stand der Forschung« oder »unter ausschließlicher Berücksichtigung der n Veränderlichen $X_1 \ldots X_n$« trägt jede einzelne Veränderliche zu dem Bruchteil $P_{0\,t}$ der Schwankungen von X_0 bei und läßt die Möglichkeit offen, daß darin noch bisher unbekannte oder unberücksichtigte Einflüsse, die mit den Veränderlichen $X_1 \ldots X_n$ in stochastischem Zusammenhang stehen, mitenthalten sind.

Sind $X_1, X_2 \ldots X_n$ untereinander nicht-korelliert, so wird $\gamma_{01\,.\,23\ldots n} = r_{01}$, $\gamma_{0\,t\,.\,12\ldots n} = r_{0\,t}$ und daher $P_{0\,t} = C_{0\,t\,.\,12\ldots n} = r_{0\,t}{}^2$ in Uebereinstimmung mit den oben für die vier idealen Würfel erhaltenen Ergebnissen.

Allgemein haben wir also in der Größe

$$\underline{\underline{P_{s\,t} = \frac{|C_{s\,t\,.\,01\ldots n}|}{\sum\limits_t |C_{s\,t\,.\,01\ldots n}| + f^2_{s\,.\,01\ldots n}}}}$$

die gesuchte Maßzahl, welche unter der Voraussetzung, daß die obwaltenden stochastischen Beziehungen lineare sind, angibt, zu welchem Bruchteil der Schwankungen von X_s die Veränderliche X_t beiträgt. Man muß sich jedoch von der Vorstellung freihalten, als ob dieses »beitragen« stets gleichbedeutend wäre mit der Art, wie »Ursache und Wirkung« im Sinne des alltäglichen Sprachgebrauchs miteinander verknüpft sind. Der Sinn einer zu einer Wirkung beitragenden »Ursache« kann nur dann untergelegt werden, wenn die Ursache uns — mindestens theoretisch — reaktiv erfaßbar ist oder wenn ein Zeitunterschied besteht.

6. Beispiel aus der atmosphärischen Physik. Die in Abschn. **5** abgeleitete Maßzahl $P_{s\,t}$ ist sehr geeignet für eine rationelle Behandlung der Frage nach dem »Sitz« der Luftdruckschwankungen am Erdboden, d. h. der Frage, ob die Luftdruckänderungen am Erdboden vorwiegend mit Temperaturänderungen in der Troposphäre oder mit solchen in der unteren Stratosphäre oder aber mit Vorgängen in noch höheren Luftschichten in Zusammenhang stehen. Die Untersuchung müßte natürlich mit einem umfangreichen aerologischen Beobachtungsmaterial — wie es heute noch gar nicht zur Verfügung steht —, getrennt für verschiedene Orte, verschiedene Jahreszeiten und verschiedene Typen der Witterungslage (= Großwetterlage), durchgeführt werden. Da es sich hier nur um die

Aufzeigung der Methode handelt, will ich mich auf die Untersuchung der Morgenregistrierballonfahrten im Mai in München[1]) beschränken. Die Beschränkung auf einen einzelnen Monat und eine bestimmte Tageszeit (Aufstiege zwischen 7^0 und 9^0 a. m.) geschieht zwecks Ausschaltung von Einflüssen des Jahres- und Tagesganges, die Auswahl des Monats und des Ortes erfolgte mit Rücksicht darauf, daß vom Mai und von München die größte Zahl von Registrierballonfahrten zur Verfügung steht, die bis 13000 m Höhe verlässige Temperaturangaben lieferten.

Mittleren Verhältnissen entsprechend und mit Rücksicht darauf, daß die Zahl der Registrierballonaufstiege, die bei ausreichender Ventilation in noch größere Höhen als 13 km führten, nur sehr gering ist, wollen wir die Luftschicht vom Erdboden (516 m) bis 10 km Höhe als Troposphäre, die Luftschicht von 10 bis 13 km als untere Stratosphäre nehmen und die gegenseitige Wechselwirkung zwischen Bodendruck, Temperatur der Troposphäre, Temperatur der unteren Stratosphäre und Luftdruck in 13 km Höhe untersuchen. Definiert man die Mitteltemperatur der Luftsäule vom Boden bis 10 km Höhe mit

$$T_{tro} = \frac{z_2 - z_1}{\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}} = \frac{9484}{\int_{516}^{10000} \frac{dz}{T}}$$

und die Mitteltemperatur der Luftsäule von 10 bis 13 km Höhe mit

$$T_{str} = \frac{z_3 - z_2}{\int_{z_2}^{z_3} \frac{dz}{T}} = \frac{3000}{\int_{10000}^{13000} \frac{dz}{T}}.$$

(z nach aufwärts positiv gerechnet), so besteht zwischen dem Bodendruck p_{516}, dem Druck p_{13000} in 13 km Höhe und T_{tro} und T_{str} nach der statischen Grundgleichung die funktionelle Beziehung

$$\ln p_{516} = \ln p_{13000} + \frac{g}{R} \cdot \frac{9484}{T_{tro}} + \frac{g}{R} \cdot \frac{3000}{T_{str}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28).$$

Setzen wir aber statt der definierten Werte T_{tro} und T_{str} durch einfache Mittelbildung aus einigen beobachteten Temperaturen gebildete Werte, z. B. das arithmetische Mittel T_{tro}' aus den Temperaturen in 1000, 3000, 5000, 7000 und 9000 m Höhe und das arithmetische Mittel T_{str}' aus den Temperaturen in 10000, 11000, 12000 und 13000 m Höhe, so sind die Größen $X_0 = \ln p_{516}$, $X_1 = T_{tro}'$, $X_2 = T_{str}'$ und $X_3 = \ln p_{13000}$ nun nicht mehr funktionell, sondern stochastisch verbunden.

Für $p_{13000} =$ konst. und $T_{str} =$ konst. geht (28) über in

$$\ln p_{516} = c_1 + \frac{c_2}{T_{tro}}$$

oder

$$X_0 = c_1 + \frac{c_2}{T_{tro}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Ebenso folgt für $p_{13000} =$ konst. und $T_{tro} =$ konst.

$$X_0 = c_3 + \frac{c_4}{T_{str}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30).$$

Die Gl. (29) und (30) stellen Hyperbeln dar, die aber in den in Betracht kommenden Wertbereichen durch gerade Linien approximiert werden können. Wir können daher für X_0, X_1, X_2 und X_3 ein lineares Beziehungsgleichungssystem aufstellen.

$t =$	0	1	2	3	$t =$	0	1	2	3
$r0\,t$	1	+ 0,193	− 0,198	+ 0,515	$C0\,t$	—	− 0,325	+ 0,123	+ 0,934
$r1\,t$	+ 0,193	1	− 0,513	+ 0,860	$C1\,t$	− 0,072	—	+ 0,181	+ 0,832
$r2\,t$	− 0,198	− 0,513	1	− 0,243	$C2\,t$	+ 0,146	+ 0,962	—	− 0,425
$r3\,t$	+ 0,515	+ 0,860	− 0,243	1	$C3\,t$	+ 0,204	+ 0,816	− 0,078	—
$\gamma0\,t$	—	− 1,686	− 0,622	+ 1,814	$P0\,t$	—	0,235	0,089	0,676
$\gamma1\,t$	− 0,375	—	− 0,352	+ 0,968	$P1\,t$	0,066	—	0,167	0,767
$\gamma2\,t$	− 0,737	− 1,874	—	+ 1,748	$P2\,t$	0,095	0,628	—	0,277
$\gamma3\,t$	+ 0,396	+ 0,949	+ 0,322	—	$P3\,t$	0,186	0,743	0,071	—
R_t^2	0,732	0,940	0,683	0,942	f_t^2	0,268	0,060	0,317	0,058

[1]) Die Beobachtungen wurden dem Deutschen Meteorologischen Jahrbuch für Bayern 1906 bis 1914 und 1922 bis 1927 entnommen.

Die aus den 28 zur Verfügung stehenden Fahrten berechneten Parameter und Maßzahlen dieses Systems sind in vorstehender Tabelle enthalten.

Aus den R^2 und f^2 der Tabelle geht hervor, daß sich X_1 und X_3, die unter sich sehr stark korreliert sind ($r_{13} = +0{,}860$), sehr gut durch die übrigen Veränderlichen darstellen lassen; dagegen trifft dies für X_0 und X_2 weniger zu. Trotzdem wurden die P nach der Formel

$$P_{st} = \frac{|C_{st}|}{\sum\limits_t |C_{st}|},$$

also unter der Annahme $f^2 = 0$, berechnet, da ja der Grad, in welchem im Mittel die eine Größe durch die anderen bestimmt wird, nicht für die als Näherungswerte benutzten Mitteltemperaturen, sondern für die wahren Mitteltemperaturen bestimmt werden soll.

Wir sehen aus der Tabelle, daß bei den durch die ausgewählten Registrierballonfahrten repräsentierten Wetterlagen des Monats Mai der Luftdruck am Boden zu $23^1/_2$ vH durch die Troposphärentemperatur, zu 9 vH durch die Temperatur der unteren Stratosphäre und zu $67^1/_2$ vH durch den Luftdruck in 13 km Höhe bestimmt (nicht »verursacht«) wurde. Die Temperatur der Troposphäre wurde zu 77 vH durch den Druck in 13 km Höhe, umgekehrt dieser zu 74 vH durch die Troposphärentemperatur bestimmt. Man ersieht daraus, daß der Zusammenhang zwischen der Temperatur der Troposphäre und dem Druck in 13 km Höhe ein doppelter ist: es kann ebenso die Erhöhung des Druckes in 13 km Höhe durch die Erwärmung der Troposphäre bewirkt werden, indem letztere eine Hebung der Flächen gleichen Druckes und damit — solange die Luft in den obersten Schichten nicht seitlich abfließt — eine Steigerung des Druckes in 13 km hervorruft, wie auch die Erwärmung der Troposphäre durch Erhöhung des Druckes in 13 km und dadurch erzeugte Kompression der darunterliegenden Schichten bewirkt sein kann.

Daß bei den C auch negative Werte auftreten können, erklärt sich aus der Gegenseitigkeit der Abhängigkeit aller betrachteten Veränderlichen. Negative C ergeben sich dort, wo der Kkf. unter der Mitwirkung der übrigen Veränderlichen ein anderes Vorzeichen hat, als dem Zusammenhang der beiden Veränderlichen bei Konstanz der übrigen Veränderlichen entsprechen würde. So ist z. B. bei gleichem Druck in 13 km Höhe und gleicher Temperatur der unteren Stratosphäre der Druck am Boden um so größer, je niedriger die Temperatur der Troposphäre ist. Trotzdem ist der Kkf. r_{01} zwischen Bodendruck und Troposphärentemperatur ein positiver, weil der Bodendruck mehr durch den Druck in 13 km bestimmt wird und dieser mit der Troposphärentemperatur stark positiv korreliert ist. Da aber eben der Kkf. r_{01} entgegen dem Zusammenhang zwischen X_0 und X_1 bei konstantem X_2 und konstantem X_3 ein positiver ist, darum ist C_{01} und C_{10} negativ. Das gleiche ist bei C_{23} und C_{32} der Fall. Bei konstantem X_0 und X_1 würde hohem Druck in 13 km Höhe eine hohe Temperatur der unteren Stratosphäre entsprechen und umgekehrt. Trotzdem ist unter dem überwiegenden Einfluß der übrigen Veränderlichen (hohe negative Korrelation der Temperatur der unteren Stratosphäre mit derjenigen der Troposphäre) r_{23} negativ statt positiv, und darum ist C_{23} und C_{32} negativ. 911

KURZE AUSZÜGE

Neuere polnische Arbeiten über Mechanik.

Ueber die physikalischen Bedingungen, unter welchen die Knickerscheinungen entstehen. Der Zweck dieser Arbeit von H. Czopowski[1]) besteht zunächst darin, ein mechanisches Modell zu konstruieren, das ein Analogon der Knickerscheinungen ist. Sei ein schwerer Punkt M mit der Masse m auf einen undehnbaren, gewichtslosen Faden OM von der Länge l am Punkt O aufgehängt (mathematisches Pendel) und in eine Drehbewegung um die vertikale Achse OE gebracht (vgl. Abb. 1). Wie eine einfache Rechnung zeigt, drückt sich der Zusammenhang zwischen dem Inklinationswinkel α und der Winkelgeschwindigkeit φ durch die Gleichung

$$\sin\alpha\,(l\varphi^2\cos\alpha - g) = 0, \quad g \equiv 9{,}81\ \mathrm{m/sec^2}$$

aus. Betrachten wir (vgl. Abb. 2) α als Funktion von φ^2, so erhalten wir für die Werte

[1]) W. T. P. Bd. III. 1. (1924), S. 19 bis 26. W. T. P. Warschauer Politechnische Gesellschaft. Sitzungsberichte und Abhandlungen. (Warszawskie towarzystwo politechniczne, Sprawozdania i prace).

$\varphi^2 \leqq \frac{g}{l}$ eine einzige Lösung $\alpha = 0$; für $\varphi^2 > \frac{g}{l}$ zwei Lösungen, nämlich eine unstabile: $\alpha = 0$ und eine zweite stabile, die dem zweiten Zweig der Kurve in der Abb. 2 entspricht. Dieses Verhalten entspricht vollkommen dem Verhalten eines langen Stabes bei Knickung[1]). Bis zu einer gewissen Druckgrenze P_{kr} gibt es bekanntlich eine einzige Lösung, wobei die maximale Durchbiegung $f = 0$ ist; dagegen werden bei den Drücken P, die größer als P_{kr} sind, ebenfalls zwei Lösungen: eine unstabile mit $f = 0$ und eine stabile mit $f > 0$ existieren.

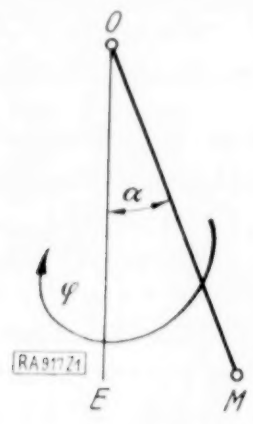


Abb. 1.

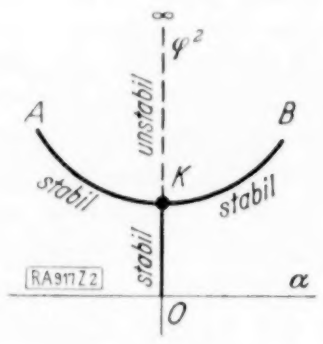


Abb. 2.

Die hier geschilderte Analogie stützt sich auf gewisse physikalische Vorbedingungen der Knickerscheinungen: bei der Knickung müssen zwei Kraftkomponenten auftreten: 1. die Druckkraft P und 2. die inneren elastischen Kräfte des Stabes. Analog treten bei dem beschriebenen Pendel 1. Zentrifugalkraft und 2. die Schwerkraft.

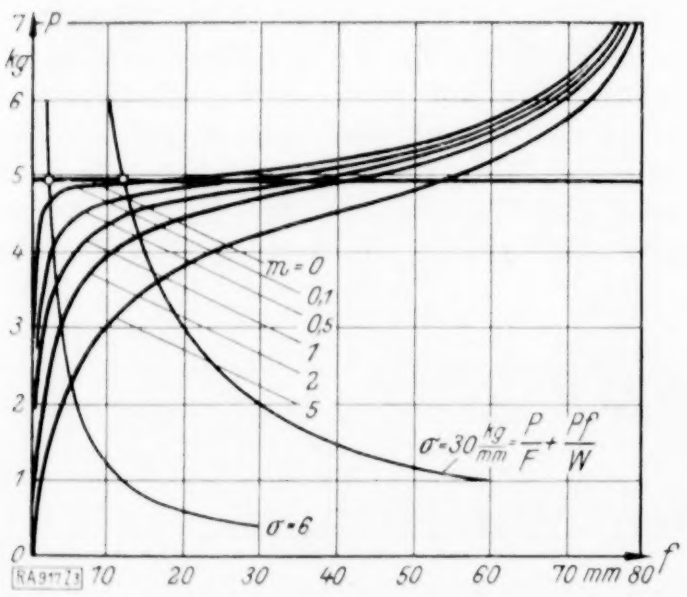


Abb. 3.

Im übrigen deckt sich dieser Standpunkt vollkommen mit der Anschauung von A. Sommerfeld (Ztschr. d. V. d. Ing. 1905, S. 1321), der »Stabilitätsgrade« einführt.

[1]) **Das Knickproblem gibt unter Umständen mehr als zwei Lösungen, was von Herrn C. bei Angabe des Modells nicht berücksichtigt wurde. (Bemerkung des Referenten.)**

Der Verfasser nimmt entschieden Stellung gegen die Deutung der Knickerscheinungen als einer Folge der exzentrischen Druckbelastung. In der (polnischen) »Technischen Zeitschrift« (Czasopismo techniczne) Nr. 7, Jahrg. 1924, hat C. die Ergebnisse seiner Versuche über die exzentrische Belastung veröffentlicht. Ein Stab von den Dimensionen $100 \times 12 \times 1$ mm wurde exzentrisch belastet, wobei die Entfernung zwischen dem Angriffspunkt der Kraft und der Mitte des Stabquerschnittes m von 0,1 bis 5 mm variiert hat. Die Versuchsergebnisse sind in der Abb. 3 zusammengestellt, wobei man sieht, daß bei der exzentrischen Belastung die Kraft P, die dazu nötig ist, um die Knickung hervorzurufen, sich in keiner Weise der kritischen Kraft P_{kr} (in diesem Falle 4,946 kg) nähert.

Auf Grund der geschilderten Auffassung ist es (nach der Meinung von H. Czopowski) möglich, die Bedingungen anzugeben, unter welchen ein System von Stäben eine Knickung erleidet. Die einzelnen Stäbe sind dabei als starr gedacht; sie sind aber in Knotenpunkten elastisch verbunden.

Unterwirft man ein solches System bei einer Druckbelastung einer zusätzlichen, momentanen Seitenbelastung, so kann es vorkommen, daß, nachdem die Seitenkraft beseitigt ist, das System dennoch die seitliche Ausbiegung behält, da in den Verbindungsstellen neue elastische Kräfte auftreten.

Der Verfasser bespricht (in ganz allgemeinen Zügen) diesen Zustand des Systems von Stäben.

Man kann schließlich — bemerkt der Verfasser — einen Stab als einen Grenzfall von unendlich vielen starren Stäben, die elastisch miteinander in Knotenpunkten verbunden sind, ansehen.

Ueber die Bewegung von zwei Walzen in einer idealen Flüssigkeit mit Anwendung auf die Theorie des Fluges in der Nähe der Erde[1]). Die Diplomarbeit von Julius Bonder[2]) beschäftigt sich mit folgendem Problem: Es sind zwei Walzen mit Kreisquerschnitt und parallelen Achsen von unendlicher Breite gegeben. Die Walzen liegen in einer inkompressiblen, idealen Flüssigkeit, die sich in einer wirbellosen Strömung befindet. Es ist das komplexe Potential zu bestimmen. Das Problem besitzt für die Aerodynamik ein hohes Interesse: nachdem man die Kreisquerschnitte auf die Profilquerschnitte eines Doppeldeckers konform abgebildet hat, läßt sich das ursprüngliche Potential auf das Aeußere des letzten Gebietes verpflanzen. Wir gelangen demnach zur Bestimmung der idealisierten Luftströmung um einen Doppeldecker. Eine weitere Anwendung bildet der Flug eines Eindeckers in der Nähe der Erde.

In § 1 führt der Verfasser krummlinige Koordinaten ξ und η ein. Bezeichnet man mit x und y die kartesischen Koordinaten der

[1]) **W. T. P. Bd. IV, 1 (1925), S. 1 bis 80.**

[2]) **Referent: Prof. C. Witoszynski.**

Ebene, so sind ξ und η durch die Beziehung

$$\frac{\xi + i\,\eta}{2} = \mathbf{Arctang}\,\frac{x + i\,y}{b} = \frac{1}{2\,i}\,\mathbf{ln}\,\frac{b + i(x+iy)}{b - i(x+iy)} \quad (1)$$

gegeben. Die $(x + iy)$-Halbebene wird bekanntlich auf einen von zwei Kreisen berandeten Streifen der $(\xi + i\eta)$-Ebene konform abgebildet (vgl. Fig. 4).

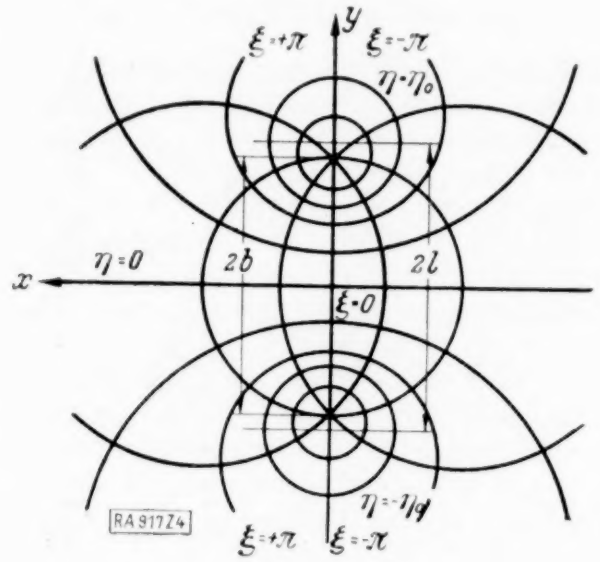


Abb. 4.

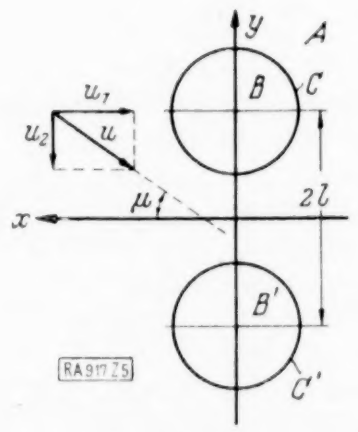


Abb. 5.

In den §§ 2 und 3 wird mit Hilfe von zwei verschiedenen Verfahren diejenige Funktion $\mathfrak{Im}\,f(z)$ abgeleitet, die im Aeußeren A des in Fig. 5 angegebenen Gebietes B, B' regulär harmonisch ist und an den Peripherien C, C' der Kreise B und B' konstante Werte annimmt. Dieses $f(z)$ hat die Gestalt:

$$\left[-u_1\,b\,(\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2} + 4\sum_{h=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\tau_0}-1}\sin n\,\zeta)\right] \equiv F_1(\zeta) \quad \ldots \quad (3).$$

Dabei bedeute u_1 die Geschwindigkeit im Unendlichen. Es ist ferner: $\cos h\,\eta_0 = \frac{l}{a}$, $2\,b = 2\,a\sin h\,\eta_0$. ζ ist mit z durch die Beziehung (1) verbunden. Die erste Methode zur Ableitung von (3) besteht im wesentlichen darin, daß der Verfasser die Lösung der Aufgabe in der Form

$$-u_1\,b\,\mathrm{tg}\,\frac{\zeta}{2} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(a_\nu + i\,b_\nu)\sin\nu\,\zeta + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty}(c_\nu + i\,d_\nu)\cos\nu\,\zeta \quad \ldots \quad (4)$$

ansetzt und aus den Nebenbedingungen die Werte von $a_\nu + ib_\nu$ und $c_\nu + id_\nu$ bestimmt. Durch den Vergleich mit der Lambertschen Reihe $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n\,w^n}{1-w^n}$ beweist der Verfasser die Konvergenz der Reihe (3) und die der Ableitungen in A. Die zweite im § 3 geschilderte »Methode der reziproken Abbildungen von Doppelquellen« (Spiegelung an Kreisen), die im wesentlichen von Hicks, Basset und Neumann stammt, dient zur neuen Ableitung der Formel (3). Sie besteht im folgenden: Sei $f_1(z)$ in B regulär, spiegelt man $f_1(z)$ um die Peripherie von B und bezeichnet die erhaltene Funktion mit $f_2(z)$, so wird $\mathfrak{Im}[f_2(z) - f_1(z)]$ an der Peripherie von B verschwinden. Nimmt man nun als Ausgangsfunktion die Funktion $f_1(z) \equiv u_1 z$, und spiegelt an der Peripherie C von B, so gelangt man zu $f_{01}(z) = -u_1\frac{a^2}{z - il}$. Der Ausdruck $\mathfrak{Im}\,[f_1(z) - f_{01}(z)]$ ist an der Peripherie C konstant. Bildet man durch die Spiegelung von $f_1(z)$ an der Peripherie C' von B' die Funktion $f_{u1}(z)$, so kann man

$$f_2(z) \equiv f_1(z) - f_{o1}(z) - f_{u1}(z)$$

als erste Näherung der Lösung betrachten. Nimmt man nunmehr die Funktion $f_2(z)$ als die weitere Ausgangsfunktion und bildet durch die Spiegelungen an C bzw. C' die Ausdrücke $f_{02}(z)$ bzw. $f_{u2}(z)$, so ist

$$f_3(z) \equiv f_2(z) - f_{o2}(z) - f_{u2}(z)$$

die zweite Näherung. Wiederholt man dieses Verfahren ad infinitum, so gelangt man in

$$f(z) = f_1(z) - f_{o1}(z) - f_{u1}(z) - f_{o2}(z) - f_{u2}(z) - \ldots\ldots \quad (5)$$

zu einer Funktion, deren Existenz in A bewiesen wird. Da man ferner durch formelle Transformationen zeigen kann, daß (5) mit (3) übereinstimmt, ist (5) ebenfalls eine Lösung unseres Problems.

Im § 4 untersucht der Verfasser die Geschwindigkeiten und die Kräfte, die der Potentialfunktion (3) entsprechen. Er zeigt noch einmal, daß C und C' Niveaulinien des imaginären Teiles von (3) sind. Er berechnet ferner die x- und y-Komponente des gesamten Flüssigkeitsdruckes auf jede Walze. Diese Komponenten werden mit P_x und P_y bezeichnet, wobei

$$P_y + i\,P_x = -\frac{\sigma}{2\,a\,\sinh\eta_0}\int_{0+i\tau_0}^{2\pi+i\tau_0}\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)^2(1+\cos\zeta)\,d\,\zeta \quad (6)$$

ist. Das im § 2 und § 3 berechnete Potential bezog sich auf den Fall, daß die Richtung der Strömung im Unendlichen mit der x-Achse zusammenfällt. Durch eine Wiederholung früherer Betrachtungen läßt sich zeigen, daß in dem Falle einer der y-Achse parallelen Strömung das Potential die Gestalt

$$F_2(\zeta) = i\,u_2\,a\,\sinh\eta_0\,\{\mathrm{tang}\,\frac{\zeta}{2} - 4\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{e^{2n\tau_0}+1}\sin n\,\zeta\} \quad \ldots \quad (7),$$

und im Falle der unter dem Winkel μ gerichteten Strömung die Gestalt

$$F_c(\zeta) = \sin\mu\, F_1(\zeta) + \cos\mu\, F_2(\zeta)$$

hat.

Nachdem das erste Problem, die Bestimmung des Potentials für das Aeußere A zweier Kreise erledigt ist, geht der Verfasser zur Frage der Abbildung von A auf das Aeußere von zwei Aeroplanflügeln über. Während die entsprechende Frage für einen Kreis ausgiebig behandelt wurde, wurde sie bis jetzt für den Fall zweier Kreise nicht betrachtet. Der Verfasser gibt deswegen eine neue Transformationsformel

$$\frac{Z}{b} = \frac{z}{b} + \frac{A_1 + i B_1}{z/b + C_1 + i D_1} + \frac{A_2 + i B_2}{z/b + C_2 + i D_2} \qquad (8)$$

an, wo A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2 gewisse Konstanten bedeuten. Die Formel (8) leistet die gewünschte Abbildung von A auf das Aeußere zweier Profile von der Joukowskischen Art.

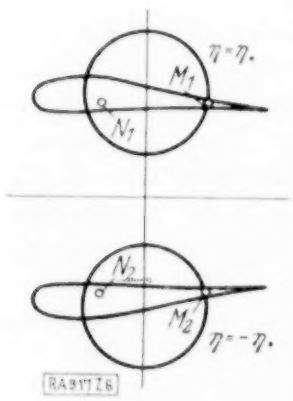


Abb. 6.

Bekanntlich ist die Abbildungsfunktion an dem der Spitze des Profils entsprechenden Punkt singulär; die theoretische, mit Hilfe der in der Z-Ebene verpflanzten Funktion (3) berechneteGeschwindigkeit wird in diesem Punkt unendlich. Um dies zu verhindern, ist es nach dem Vorschlag von Herrn Witoszynski, zweckmäßig im Falle eines Eindeckers (ein Profil) zu $F_c(\zeta)$ die Zusatzfunktion

$$F_w(\zeta) \equiv [f_w(z)], \quad f_w(z) \equiv \frac{2 i a^{\frac{3}{2}} u K e^{\frac{i\alpha}{2}}}{z^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}}} \qquad (9)$$

beizufügen, um das Unendlichwerden der theoretischen Geschwindigkeit zu verhindern. Es ist dabei $z \equiv a_1 e^{i(\pm\pi+\alpha)}$ derjenige Punkt, welcher der Spitze entspricht. Die Experimente im Laboratorium von Eiffel haben die gute Uebereinstimmung der Formel (9) mit der Erfahrung bestätigt. Der Verfasser schlägt — im Falle von zwei Kreisen — als die entsprechende Zusatzfunktion.

$$F_w(\zeta) = a u \Bigg\{ K_1' \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n \frac{\zeta-\zeta_1}{2}}{\sinh n \frac{\eta_0}{2}} + i K_1'' \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos n \frac{\zeta-\zeta_1}{2}}{\cosh n \frac{\eta_0}{2}} + K_2' \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n \frac{\zeta-\zeta_2}{2}}{\sinh n \frac{\eta_0}{2}} + i K_2'' \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos n \frac{\zeta-\zeta_2}{2}}{\cosh n \frac{\eta_0}{2}} \Bigg\} \quad \ldots\ldots (10)$$

vor, wobei K_1', K_1'', K_2' und K_2'' Konstanten sind. Die endgültige Lösung des Problems lautet somit

$$F(\zeta) = F_c(\zeta) + F_w(\zeta) \quad \ldots\ldots (11).$$

Im § 8 wird zu einer wichtigen Anwendung der Theorie, zum Flug eines Eindeckers in der Nähe der Erde, übergegangen. Nach gewissen Transformationen erhält man

$$F(\zeta) = -u a \Bigg\{ \sinh\eta_0 \operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} - \frac{c\eta_0}{2\pi u_1 a}\zeta + 4\sinh\eta_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n + 1}{e^{2n\eta_0} - 1} \sin n\zeta - 2K \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n \frac{\zeta-\zeta_0}{2}}{\sinh n \frac{\eta_0}{2}} \Bigg\} \quad \ldots (12).$$

Der Verfasser behandelt eingehend diesen wichtigen Spezialfall. Er stellt eine Reihe von Hilfstabellen auf, die eine bequeme Berechnung der für die Aerodynamik wichtigen Größen erlaubt. Schließlich zeigt er, wie man durch eine geeignete Approximation die Rechnung vereinfachen kann. Der Auftrieb λ wächst bei der Annäherung an die Erde. Ein anschauliches Bild gibt uns eine Zeichnung von λ als Funktion des Abstandes von der Erde für $\alpha = 5^0$, 10^0, 15^0. Im § 9 wird eine graphisch-analytische Methode zur Berechnung von λ besprochen und ein Beispiel durchgerechnet.

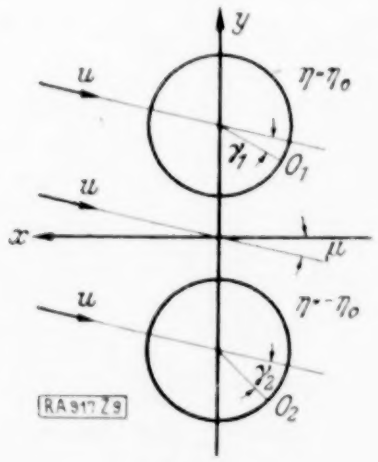


Abb. 7.

Die Untersuchung bietet bestimmt Interesse für einen angewandten Mathematiker. Es ist zu bedauern, daß der Verfasser darauf nicht hingewiesen hat, daß die gesuchte Potentialfunktion sich mit Hilfe von elliptischen Funktionen in geschlossener Form darstellen läßt. Die mit Hilfe von elliptischen Funktionen aufgestellten Formeln sind natürlich für die numerische Rechnung mehr geeignet, als die vom Verfasser abgeleiteten unendlichen Reihen. Ferner hätte

sich der Verfasser dadurch die Aufstellung einiger Hilfstabellen ersparen können[1]).

Die Stokes schen Gleichungen in Zylinderkoordinaten[2]) von A. P. Troskolanski. In der vorliegenden Arbeit werden die Stockesschen Gleichungen einer laminaren Strömung einer Flüssigkeit auf die Zylinderkoordinaten bezogen — mit Hilfe von rein formalen Transformationen — aufgestellt.

Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit durch ein Gitter[3]) (Diplomarbeit von Stefan Neumark)[4]). Unter einem Gitter versteht der Verfasser eine Anordnung von unendlich vielen Stäben unendlicher Länge mit kreiszylindrischem Querschnitt (Durchmesser $= 2a$), die längs einer Geraden (die mit der y-Achse zusammenfällt) in gleichen Entfernungen (b) voneinander gelagert sind[5]) (vergl. Abb. 9). Denkt man sich den Raum mit einer wirbellos strömenden, ideellen, inkompressiblen Flüssigkeit ausgefüllt, so entsteht das Problem, das (zweidimensionale) Potential dieser Strömung zu bestimmen, was die Hauptaufgabe der vorliegenden Arbeit ist. Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile, wobei im ersten (§ 1 bis § 18) eine Reihe von Hilfsbetrachtungen durchgeführt sind. Im zweiten (§ 19 bis § 27) wird die eigentliche Aufgabe mit Hilfsmitteln behandelt, die dem von Herrn Bonder benutzten Verfahren der »verschwindenden Bilder«[6]) nachgebildet sind. § 2 und § 3 sind der Ableitung gewisser (bekannter) Eigenschaften der einwertigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen gewidmet. Nachdem der Verfasser die übliche Charakterisierung der Funktion durch die Entwicklung des kritischen Teiles in eine unendliche Reihe (nach negativen Potenzen der Veränderlichen) angibt, illustriert er das Verhalten in der Umgebung des Poles durch Bilder der Niveaulinien des imaginären Teiles (in der Art, wie dies z. B. in dem bekannten Buch von Felix Klein: »Ueber Riemanns Theorie der Algebraischen Funktionen und ihrer Integrale«[1]) geschieht). Kombination von zwei Quellen (von denen jede einem Pol entspricht), wobei die eine im Endlichen, die andere im Unendlichen gelegen ist, gibt im allgemeinen eine Potentialströmung, die einen ganz im Endlichen gelegenen Bereich umspült (der von

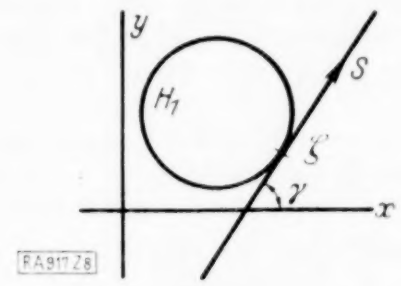


Abb. 8.

einer Niveaulinie der Funktion begrenzt ist). In den § 4 bis § 9 wird eine Anzahl von Beispielen solcher Funktionen angegeben und deren Verlauf näher untersucht. Der Verfasser betrachtet die Ausdrücke

$$A z + u a^{n+1} e^{i\gamma} z^{-n}$$

(A, u, a, b, reelle Konstanten, n ganzzählig).

$$(A z + u a^2 e^{i\alpha} z^{-1}), \quad u (z + 2 b^2 z^{-1} + b^4 z^{-3}),$$

$$u\left(z + \frac{a^2}{z-b} + \frac{a^2}{z+b}\right), \quad u\left[z + \frac{a^2}{(z-b\,i)} + \frac{a^2}{(z+b\,i)}\right].$$

Spiegelt man den Elementarpol

$$f_n(z) \equiv \frac{D e^{i\gamma}}{(z - \varrho\, e^{i\Theta})^n}$$

an dem in der Abb. 8 angegebenen Kreis vom Radius a (wobei der Koordinatenanfangspunkt sich im Kreismittelpunkt befindet), so geht diese Funktion in

$$R[f_n(z)] \equiv \frac{D e^{i(n\pi + n\Theta - \gamma)} z^n}{\varrho^n \left(z - \frac{a^2}{\varrho} e^{i\Theta}\right)^n}$$

über. In den § 10 bis § 14 betrachtet der Verfasser die Ausdrücke $R[\sum_k f_k(z)]$, die man durch die Spiegelung endlich vieler Elementarpole $\sum_k f_k(z)$ erhält. Im § 15 wird zu der eigentlichen Aufgabe übergegangen: Es bedeuten $H_1, H_2, \ldots H_k \ldots$ die Kreisperipherien der Schnitte der Berandungen der Stäbe mit der xy-Ebene, $H_1, H_2, \ldots H_k \ldots$ sind somit die Niveaulinien der gesuchten Stromfunktion. Dann im § 15 wird zur Behandlung der Bestimmung der Potentialfunktion mit Hilfe der Methode »verschwindender Spiegelbilder« übergegangen.

Der imaginäre Teil der Funktion $f(z) \equiv u z$ ist die Lösung der Aufgabe für die volle (ungelochte) Ebene. Gehen wir von $f(z)$ aus und spiegeln wir $f(z)$ an den H_k, so gelangen wir zur Funktion $R_k[f(z)] \equiv f_{1,k}(z)$. Der imaginäre Teil der Funktion $f(z) - f_{1,k}(z)$ wird an den H_k konstant. Bilden wir nun den Ausdruck

$$\mathfrak{F}_1(z) \equiv f_1(z) + \sum_{k=1}^{k=\infty} R_k[f(z)] \equiv f(z) + \sum_{k=1}^{k=\infty} f_{1k}(z) \quad (1),$$

[1]) Ungefähr zu derselben Zeit ist die Thèse von Hrn. D. Riabuschinski »Sur les équations générales du mouvement de corps solides dans un liquide incompressible«, Verlag Gauthiers-Villars, Paris 1922, über das gleiche Thema erschienen. Vergl. dazu insbesondere den § 4 »Mouvement cyclique plan d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement á une paroi rectiligne«. S. 111 bis 130 der Arbeit von Riabuschinski. Die beiden Arbeiten sind anscheinend vollständig unabhängig voneinander entstanden.

Aehnliche Probleme behandeln L. Lagally »Strömung im Außenraum zweier Kreise« und W. Müller »Zur hydrodynamischen Deutung der elliptischen Funktionen«, Zamm, Bd. 8, (1928), S. 432 und 447.

[2]) W. T. P. Bd. IV, 1 (1925), S. 80.

[3]) W. T. P. Bd. V, 1 (1926), S. 1 bis 97.

[4]) Referent: Prof. C. Witoszynski.

[5]) Mit einem verwandten Problem beschäftigt sich E. König »Potentialströmung durch Gitter«. Zamm, Bd. 2, (1922), S. 422.

[6]) Vergl. das vorherige Referat.

[1]) Verlag B. G. Teubner, Leipzig 1882, insbesondere S. 3, 4, 8 und 11.

so wird der imaginäre Teil von $\mathfrak{F}_1(z)$ in erster Annäherung die Lösung unserer Aufgabe darstellen. Nimmt man ferner

$$\mathfrak{F}_2(z) \equiv f(z) + \sum_{k=1}^{k=\infty} f_{1,k}(z) + \sum_{k=1}^{k=\infty} f_{2,k}(z),$$

so ist der imaginäre Teil von $\mathfrak{F}_2(z)$ die zweite Annäherung der Lösung. Dieses Verfahren kann man ad infinitum fortsetzen und man gelangt auf diese Weise zu einem Ausdruck:

$$\mathfrak{F}(z) = \lim_{n \to \infty} \mathfrak{F}_n(z) = f(z) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=\infty} f_{n,k}(z) \quad (2).$$

Es entsteht jetzt die Aufgabe zu zeigen:

I. daß $\mathfrak{F}(z)$ in der ganzen Ebene außerhalb der Kreise $H_1, H_2 \ldots H_k \ldots$ existiert und im Innern dieses Gebietes eine reguläre Funktion ist,

II. daß $\mathfrak{F}(z)$ die gesuchte Lösung darstellt.

Bevor zu diesem Beweis übergegangen wird, beweist der Verfasser einige einfachere Hilfsformeln (§ 16 bis § 18), die er im folgenden benötigt.

Der zweite Teil der Arbeit wird dem eigentlichen Beweis gewidmet. Es wird zunächst für $\mathfrak{F}(z)$ eine neue Darstellung angegeben. Es wird gezeigt, daß

$$\mathfrak{F}_1(z) = u z + \frac{\pi u a^2}{b} \operatorname{cotangh} \frac{\pi z}{b} \quad \ldots\ldots (3),$$

$$\mathfrak{F}_2(z) = u z + \frac{\pi u a^2}{b} \operatorname{cotangh} \frac{\pi z}{b} + \frac{2 u a^2}{b} \quad (4),$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sigma_{2n}}{(2n-2)!} \left(\frac{a\sqrt{\pi}}{b}\right)^{4n+2} \operatorname{cotangh}^{(2n-2)} \frac{\pi z}{b}$$

$$\mathfrak{F}(z) = u z + \frac{u a^2}{b} \left\{ \pi \operatorname{cotangh} \frac{\pi z}{b} + \right. \quad (5)$$

$$\left. 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^{n+1} \frac{\tau_{2n}}{(2n-2)!} \left(\frac{a\sqrt{\pi}}{b}\right)^{4n-2} \operatorname{cotangh}^{(2n-2)} \frac{\pi z}{b} \right\}$$

ist, wobei

$$\left.\begin{aligned} \tau_{2n} &= \sum_{k=1}^{k=\infty} 2^{k-1} \sigma_{2n}^{(k-1)}, \\ \sigma_{2n}^{(k)} &= \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(2p+2n-3)!}{(2n-1)!\,(2p-2)!} \sigma_{2p}^{(k-1)} \sigma_{4(n+p-1)} \left(\frac{a}{b}\right)^{4p-2} \\ \sigma_{2n} &\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2n}} \end{aligned}\right\} (6)$$

bedeutet. Die angegebene Formel für $\mathfrak{F}(z)$ gilt, wenn die Strömung zur x-Achse parallel ist. Eine analoge Formel $\mathfrak{G}(z)$ erhalten wir für die der y-Achse parallelen Strömung. Ist α der Winkel zwischen der Strömungsrichtung und der x-Achse, so erhalten wir (§ 20 bis § 22) allgemein für die Stromfunktion der Imaginärteil der Funktion

$$\mathfrak{H}(z) = \mathfrak{F}(z) \cos\alpha + \mathfrak{G}(z) \sin\alpha \quad \ldots (7)$$

Schließlich formuliert der Verfasser im § 23 die schon angegebenen Fragen: den Beweis der Probleme I und II und ferner gewisser Hilfsfragen, die hierzu nötig sind. Die wichtigste von diesen Nebenfragen, die Konvergenz der für τ_{2n} und σ_{2n} oben angegebenen Ausdrücke ihm (bei $\frac{a}{b} < 0{,}42$) auf Grund der Sätze von Weierstrass und Markoff über die Summation von doppelt unendlichen Reihen gelingt.

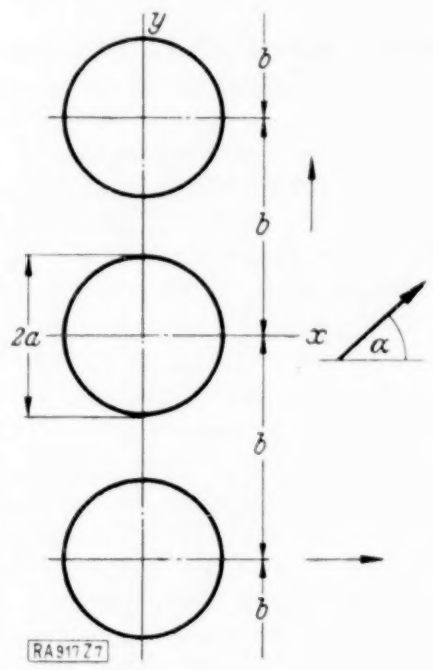


Abb. 9.

Der Beweis von I bietet bedeutende Schwierigkeiten; in Anbetracht des technischen Charakters der Arbeit skizziert der Verfasser in allgemeinen Zügen den Weg, auf dem er gewonnen werden kann; diese Betrachtungen sind, wie der Verfasser selbst bemerkt, unvollständig. Da ferner der Beweis von II ebenfalls besondere mathematische Schwierigkeiten verursacht, begnügt sich der Verfasser mit der Verifizierung der Ergebnisse an einigen Beispielen, die eingehend durchgerechnet sind. Man entnimmt aus ihnen, daß in den angegebenen Fällen die für den imaginären Teil von $\mathfrak{F}(z)$ berechneten Ausdrücke an den Kreisperi-

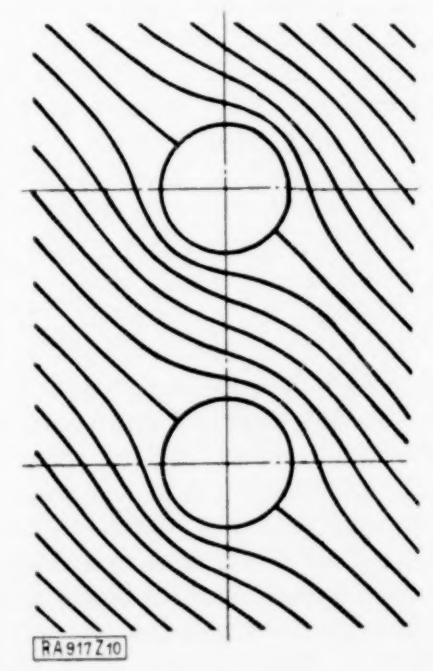


Abb. 10.

pherien von H_n annähernd konstant sind. Um die Koeffizienten von $\mathfrak{F}(z)$, $\mathfrak{G}(z)$ und $\mathfrak{H}(z)$ bei praktischen Beispielen berechnen zu können, stellt der Verfasser im § 24 und § 25 die Werte von $\sigma_{2n}^{(k)}$ und τ_{2n} bei $\frac{a}{b}=\frac{1}{3}$ in einer Tabelle zusammen. Er diskutiert ferner in einem konkreten Falle die Ergebnisse, wobei sich seine Formel als eine gute Annäherung für $\mathfrak{F}(z)$ erweist.

[1]) Um die gesuchte Potentialströmung zu bestimmen, genügt es offenbar, das Gebiet $CAB\,\infty$ auf das Gebiet $A'B'\,\infty$ (vergl. Abb. 11 und 12) derart

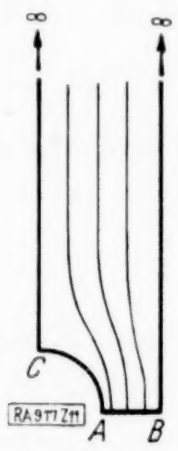


Abb. 11.

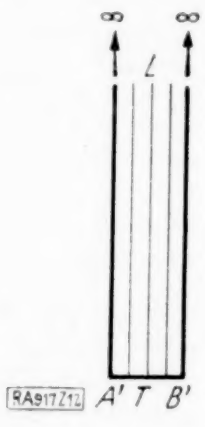


Abb. 12.

abzubilden, daß die Punkte A, B, ∞ in die Punkte A', B', ∞ übergehen. Verpflanzt man dann die der y-Achse parallelen Geraden (z. B. LT) rückwärts auf das ursprüngliche Gebiet $CAB\,\infty$ so gelangt man zu den gesuchten Stromlinien. Das Gebiet $CAB\,\infty$ ist von vier Kreisen (drei davon von einen Radius $=\infty$) berandet. Die Abbildung der oberen Halbebene auf $CAB\,\infty$ wird durch eine Funktion vermittelt, die der Schwarzschen Gleichung genügt.

Obwohl der tatsächliche Beweis, daß die Formel (5) konvergiert und die Lösung des Problems darstellt, fehlt, was angesichts der Schwierigkeit der Aufgabe und des technischen Charakters der Arbeit zu entschuldigen ist, bietet die Untersuchung für den angewandten Mathematiker Interesse, denn schon die erwähnten Funktionen $\mathfrak{F}_1(z)$ bzw. $\mathfrak{F}_2(z)$ stellen verhältnismäßig gute Näherungslösungen des Problems dar. Es ist allerdings zu bedauern, daß der Verfasser seine Fragen mit der Theorie der automorphen Funktionen bzw. den Funktionen, welche der Schwarzschen Differentialgleichung genügen, nicht in Zusammenhang gebracht hat[1]). Die dabei auftretende Schwierigkeit, die Bestimmung der Konstanten in der Differentialgleichung, kann man entweder mit Hilfe von unendlichen Determinanten oder aber mit Hilfe der ϑ-Reihen überwinden[2]). Es wäre wünschenswert, daß der Verfasser auf die Untersuchung zurückkommt und die noch ausstehenden Beweise nachträgt.

Berlin. Stefan Bergmann. 917

[2]) Vergl. dazu: »Ueber die Bestimmung der Verzweigungspunkte eines hyperelliptischen Integrals aus seinen Periodizitätsmoduln mit Anwendungen auf die Theorie des Transformators«, Mathematische Zeitschrift Bd. 19 (1923), S. 8 bis 25, und »Ueber unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereich gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen«, Mathematische Zeitschrift Bd. 29 (1929), S. 641 bis 677; ferner V. Fock: »Sur la représentation conforme d'un domaine limité par quatre cercles tangents sur un demi-plan«, Journal der physikalisch-mathematischen Gesellschaft von Leningrad Bd. 1 (1927), S. 147 bis 168.

KLEINE MITTEILUNGEN

Die Ladungsverteilung auf zwei ungleichen parallelen kreiszylindrischen Leitern. Zur Berechnung der Ladungsverteilung auf zwei ungleichen kreiszylindrischen Leitern mit beliebiger Potentialdifferenz wird ausgegangen von einem System simultaner Integralgleichungen erster Art. Die erhaltenen simultanen Systeme unendlich vieler Gleichungen lassen sich mit Hilfe der Neumannschen Reihe formal lösen. Diese formale Lösung wird durch Summation in eine zur praktischen Rechnung wie zum Konvergenznachweis geeignete Form gebracht. Die bereits aus der Literatur bekannten Fälle zweier gleicher Kreiszylinder mit gleicher Gesamtladung und zweier ungleicher Kreiszylinder mit entgegengesetzt gleicher Gesamtladung ergeben sich als Sonderfälle. Zum Schluß wird eine Anwendung gemacht auf die Berechnung des hochfrequenten Widerstandes zweier ungleicher paralleler Leiter mit gleichen Strömen.

1. Formale Lösung der Aufgabe. Die Ladungsverteilung auf zwei parallelen kreiszylindrischen Leitern von ungleichem Radius, aber entgegengesetzt gleicher Gesamtladung läßt sich elementar berechnen[1]). Auch für gleiche Zylinder und gleiche Gesamtladung ist die Aufgabe, zwar weniger elementar, gelöst worden[2]). Hierdurch ist der Fall gleicher Zylinder mit beliebiger Gesamtladung, also auch beliebiger Potentialdifferenz erledigt. Der Fall zweier ungleicher kreiszylindrischer Leiter mit gleicher Gesamtladung ist aber bis jetzt noch nicht behandelt worden[3]). Eine Lösung dieser Aufgabe

[1]) A. Russell, Proc. Phys. Soc. Bd. 31 (1918), S. 111.

[2]) F. J. W. Whipple, Proc. Roy. Soc. A. 96 (1920), S. 469.

[3]) Riemann-Weber, Differ.- und Integralgl. 7. Aufl. Bd. II (1927), S. 291.

gestattet durch Zusammenstellung mit Russels Lösung den allgemeinsten Fall zweier ungleicher Kreiszylinder mit beliebiger Gesamtladung und somit beliebiger Potentialdifferenz zu behandeln.

Es ist darauf hingewiesen worden[1]), daß die Dirichletsche Aufgabe für Außenraumprobleme oft einfach mit Hilfe einer Integralgleichung bzw. eines Systems simultaner Integralgleichungen erster Art näherungsweise gelöst werden kann. Am vorliegenden Problem möchte ich hier zeigen, wie man eine exakte Lösung eines solchen Gleichungssystems erhält. Es seien P_1 und P_2 die Potentiale der beiden Zylinderoberflächen, a und b ihre Halbmesser, R der Abstand ihrer Zentren, u und v die Ladungsdichten auf ihrer Oberfläche, $a\,d\,\xi$ und $b\,d\,\eta$ ihre Oberflächenelemente, wo ξ und η gemessen werden, wie in Abb. 1 angegeben.

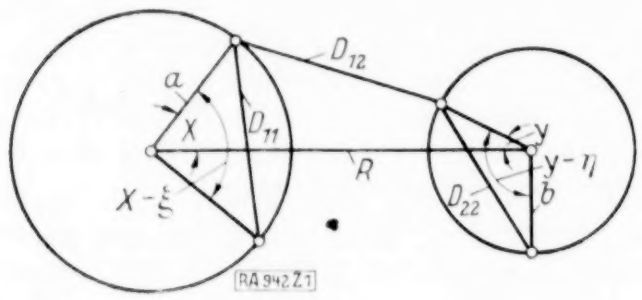


Abb. 1.

Die Potentiale sind mit den Ladungsdichten verknüpft durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= a\int_0^{2\pi} u \ln D_{11}\, d\,\xi + b\int_0^{2\pi} v \ln D_{12}\, d\,\eta \\ P_2 &= a\int_0^{2\pi} u \ln D_{21}\, d\,\xi + b\int_0^{2\pi} v \ln D_{22}\, d\,\eta \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Da wir P als vorgegeben, u und v als gesucht betrachten, haben wir hiermit ein System zweier simultaner Integralgleichungen erster Art für u und v gewonnen.

Bei der Lösung werden wir folgendermaßen vorgehen. Die Ausdrücke $\ln D_{11}$, $\ln D_{12}$ usw. werden in doppelte, die Ladungsdichten u und v in einfache Fourier-Reihen nach den Winkeln ξ und η entwickelt. Hierdurch entstehen aus (1) vier simultane Systeme je unendlich vieler Gleichungen mit gleich viel Unbekannten. Wenn das Verhältnis der Gesamtladungen der Zylinder angenommen wird, lassen sich die Fourier-Koeffizienten der Ladungsdichten aus zwei dieser Gleichungssysteme berechnen. Der springende Punkt ist, daß es gelingt, diese zwei Gleichungssysteme mit der Neumannschen Reihe zu lösen, deren Konvergenz sich nach Summierung einfach zeigen läßt[2]). Zugleich wird durch diese Summierung ein Ausdruck für die Lösung erhalten, der eine leichte numerische Rechnung ermöglicht.

[1]) Ann. d. Phys. Bd. 87 (1928), S. 153.

[2]) Bekanntlich läßt sich die Neumannsche Reihe im allgemeinen nicht auf Integralgleichungen erster Art anwenden.

Wie früher gezeigt wurde (Ann. d. Phys., l. c.), gelten die Gleichungen:

$$\ln D_{11} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,x \cos n\,\xi}{n},$$

$$\ln D_{12} = \ln R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \cos n\,x - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \cos k\,\eta - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\,n!}\,\alpha^n \beta^k \cos k\,\eta \cos n\,x,$$

$$\ln D_{21} = \ln R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n} \cos n\,\xi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta^k}{k} \cos k\,y - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\,n!}\,\alpha^n \beta^k \cos k\,y \cos n\,\xi,$$

$$\ln D_{22} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\,y \cos n\,\eta}{n},$$

mit $\alpha = a/R$; $\beta = b/R$, während Sinusglieder fortgelassen worden sind, da sie doch später bei der Integration keinen Beitrag liefern. Die Ladungsdichten haben nämlich, wie aus der Symmetrie der Abb. 1 hervorgeht, nur kosinusharmonische.

Mit

$$u\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos n \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix},$$

$$v\begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix} = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos n \begin{pmatrix} y \\ \eta \end{pmatrix},$$

ergibt sich aus (1):

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi} P_1 &= 2\,b\,v_0 \ln R - b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k\,\beta^k}{k} \\ \frac{1}{\pi} P_2 &= 2\,a\,u_0 \ln R - a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k\,\alpha^k}{k} \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{u_n}{n} &= -2\,u_0 \frac{\alpha^n}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} v_k\,\beta^k\,\alpha^n \frac{(n+k-1)!}{k!\,n!} \\ \frac{v_n}{n} &= -2\,v_0 \frac{\beta^n}{n} - \sum_{k=1}^{\infty} u_k\,\alpha^k\,\beta^n \frac{(n+k-1)!}{k!\,n!} \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

$$n = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Wir nehmen nun, wie bereits in der Einleitung hervorgehoben, an, die Gesamtladungen der Zylinder seien gleich

$$u_0 = v_0 = \gamma$$

und setzen

$$\frac{u_n}{\gamma} = p_n, \qquad \frac{v_n}{\gamma} = q_n \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

wodurch sich die Gleichungen (3), die hinreichen, u_n und v_n zu bestimmen, schreiben:

$$\left.\begin{aligned} p_n &= -2\,\alpha^n - \sum_{k=1}^{\infty} q_k\,\alpha^n\,\beta^k \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \\ q_n &= -2\,\beta^n - \sum_{k=1}^{\infty} p_k\,\alpha^k\,\beta^n \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Auf dieses Gleichungssystem wenden wir die Neumannsche Reihe an:

$$\left.\begin{aligned} p_{1,n} &= 2\,\alpha^n\,, \\ p_{2,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} q_{1,k}\,\alpha^n\,\beta^k\,\frac{(n+k-1)!}{k!\;(n-1)!}\,, \\ q_{1,n} &= 2\,\beta^n\,, \\ q_{2,n} &= \sum_{k=1}^{\infty} p_{1,k}\,\alpha^k\,\beta^n\,\frac{(n+k-1)!}{k!\;(n-1)!}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n &= -\,p_{1,n} + p_{2,n} \mp \cdots \\ q_n &= -\,q_{1,n} + q_{2,n} \mp \cdots \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ (6).$$

Wenn (6) konvergiert, haben wir hiermit unsere Aufgabe gelöst.

2. Konvergenznachweis. Da gilt:

$$(1-\beta^2)^{-n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{k!\;(n-1)!}\,\beta^{2k}\,,$$

können wir schreiben:

$$\left.\begin{aligned} p_{2,n} &= 2\,\alpha^n\,\{(1-\beta^2)^{-n} - 1\} \\ p_{3,n} &= 2\,\alpha^n\left\{\left(1-\frac{\beta^2}{1-\alpha^2}\right)^{-n} - (1-\beta^2)^{-n}\right\} \\ p_{4,n} &= 2\,\alpha^n\left\{\left(1-\frac{\beta^2}{1-\dfrac{\alpha^2}{1-\beta^2}}\right)^{-n} - \left(1-\frac{\beta^2}{1-\alpha^2}\right)^{-n}\right\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{2,n} &= 2\,\beta^n\,\{(1-\alpha^2)^{-n} - 1\} \\ q_{3,n} &= 2\,\beta^n\left\{\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\beta^2}\right)^{-n} - (1-\alpha^2)^{-n}\right\} \\ q_{4,n} &= 2\,\beta^n\left\{\left(1-\frac{\alpha^2}{1-\dfrac{\beta^2}{1-\alpha^2}}\right)^{-n} - \left(1-\frac{\alpha^2}{1-\beta^2}\right)^{-n}\right\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

und wiederum:

$$\begin{aligned} p_n &= -\,p_{1,n} + p_{2,n} \mp \ldots, \\ q_n &= -\,q_{1,n} + q_{2,n} \mp \ldots. \end{aligned}$$

Wir werden zeigen: a) daß die Reihen für p_n und q_n konvergieren, b) daß die Quotienten $(p_{n+1}/p_n)^2$ und $(q_{n+1}/q_n)^2$ für $n \longrightarrow \infty$ kleiner als eins sind, woraus nach dem Fischer-Rießschen Satz die Konvergenz der Fourier-Reihen für die Ladungsdichten folgt.

Da die Reihen für p_n und q_n alternieren, sind sie konvergent, sobald

$$\lim_{k\to\infty} p_{k,n} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} q_{k,n} = 0\,.$$

Die Gleichungen (7) zeigen, daß dies der Fall ist, da die Ausdrücke für $p_{k,n}$ und $q_{k,n}$ aus der Differenz zweier Glieder aufgebaut sind, die für $k \longrightarrow \infty$ gleich werden. Aus (6) und (7) ergibt sich für $n \longrightarrow \infty$

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} < \frac{\alpha}{\mu}\,, \qquad \frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{\beta}{\nu}\,,$$

wo μ und ν die Kettenbrüche:

$$\mu = 1 - \cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\beta^2}}}}\;; \qquad \nu = 1 - \cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\ldots}}}}$$

darstellen. Durch Rekursionsbetrachtungen erhellt, daß

$$1 - \frac{\alpha}{\mu} \quad \text{und} \quad 1 - \frac{\beta}{\nu}$$

beide positiv sind, wenn man voraussetzt $\alpha + \beta < 1$. Hieraus folgt aber, daß

$$\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)^2 < 1 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\beta}{\nu}\right)^2 < 1\,,$$

so daß auch der Satz (b) nachgewiesen ist.

3. Diskussion der Sonderfälle; Skineffekt. Zunächst betrachten wir den Sonderfall, daß der eine Kreiszylinder einen verschwindend kleinen Halbmesser besitzt, z. B.

$$\beta = 0\,.$$

Wir erhalten dann aus (6) und (7) sofort

$$p_n = -\,2\,\alpha^n\,,$$

so daß die Ladung auf dem endlichen Zylinder gegeben wird durch:

$$u = u_0 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \cos n\,x\,,$$

was eine bekannte Formel ist.

Wenn beide Zylinder gleichen Radius haben, wird $\alpha = \beta$ und die Formeln (6) und (7) geben, als Reihen nach α entwickelt, bequeme Ausdrücke, deren erste Glieder bereits früher angegeben wurden (Ann. d. Phys., l. c.).

Nehmen wir an, die Gesamtladungen der Zylinder seien absolut genommen gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, so bleiben die Ausdrücke (7) in derselben Form brauchbar, während (6) sich schreibt:

$$\begin{aligned} -\,p_n &= p_{1,n} + p_{2,n} + p_{3,n} + \ldots \\ -\,q_n &= q_{1,n} + q_{2,n} + q_{3,n} + \ldots. \end{aligned}$$

Hierdurch wird der Teil (a) des oben angedeuteten Konvergenznachweises unbrauchbar; der Teil (b) behält aber seine Kraft. Indessen sieht man aus den zuletzt angeschriebenen Gleichungen im Zusammenhang mit (7), daß die Größen p_n und p_n statt durch eine Reihe jetzt je durch einen einzigen unendlichen Kettenbruch gegeben sind:

$$\alpha\,(-p_n)^{-1/n} = 1 - \cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\alpha^2}}}}}\,,$$

$$\beta\,(-q_n)^{-1/n} = 1 - \cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\cfrac{\alpha^2}{1-\cfrac{\beta^2}{1-\alpha^2}}}}\,.$$

Die Konvergenz dieser Kettenbrüche läßt sich nachweisen, wenn man voraussetzt, daß die Zylinder sich nicht berühren, also

$$\alpha + \beta < 1\,.$$

Endlich kann man die gefundene Lösung anwenden zur Berechnung des Wechselstrom-

widerstandes zweier paralleler kreiszylindrischer Leiter von ungleichem Halbmesser, durch die gleiche Gesamtströme fließen. Bereits Lord Kelvin hat darauf hingewiesen, daß man gewisse Fälle der hochfrequenten Stromverteilung in zylindrischen Leitern elektrostatisch behandeln kann. Die hochfrequente Stromdichte pro Flächeneinheit der Zylinderoberfläche muß hierzu gleich der Ladungsdichte des elektrostatischen Problems gesetzt werden.

Man kann den Nachweis dieses Kelvinschen Satzes jetzt leicht mit einer Integralgleichung führen. Wir beschränken uns auf einen einzigen Leiter. Man kann die gleichen Betrachtungen aber auch für mehrere Parallele anstellen. Bezeichnet $S(xy)$ die Stromdichte pro Querschnittseinheit eines Zylinders, so ist die Wechselstromverteilung über den Querschnitt eines Leiters gegeben durch[1]):

$$S(x,y) = \frac{a^2}{4\pi}\iint \ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cdot S(\xi\eta)\,d\xi\,d\eta + \text{konst.},$$

wobei

$$c^2 a^2 = 4\pi w g\sqrt{-1},$$

c = Lichtgeschwindigkeit,
w = Kreisfrequenz,
g = Leitfähigkeit.

Wächst nun die Kreisfrequenz über alle Grenzen, so konzentriert sich die Stromdichte S auf eine dünne Oberflächenschicht, so daß das Integral über die Leitoberfläche erstreckt werden kann, wenn man hinfort unter S die Stromdichte pro Längeneinheit des Umfangs des Zylinder-Querschnittes versteht. Die Konstante der obigen Formel muß man ebenfalls über alle Grenzen wachsen lassen, wenn der Gesamtstrom durch den Leiter endlich ist. Hierdurch geht die obige Gleichung über in

$$\int S \ln\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\cdot d\,0 + \text{konst.} = 0,$$

und dies ist die Integralgleichung für die elektrostatische Ladung auf Zylinderoberflächen[1]).

Da die Stromdichte durch die früheren Formeln in der Form einer Fourier-Reihe:

$$u = u_0 + \Sigma\, u_n \cos n\,x$$

gegeben wird, während im Falle eines Gleichstromes gilt (wenn das Innere des Leiters stromlos wäre):

$$u = u_0,$$

so ergibt sich für das Verhältnis des Wechselstromwiderstandes zum Gleichstromwiderstande:

$$\frac{r_w}{r_g} = 1 + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{u_n}{u_0}\right)^2,$$

oder mit unseren früheren Bezeichnungen:

$$\frac{r_w}{r_g} = 1 + \frac{1}{2}\Sigma\, p_n^2.$$

Eine ähnliche Formel (nur mit q_n) läßt sich für den zweiten Leiter anschreiben. Die angegebenen Reihen erlauben demnach in einfacher Weise eine Bestimmung des Quotienten zwischen hochfrequentem Wechselstromwiderstand und dem Gleichstromwiderstand ungleicher paralleler Kreiszylinder, die gleichgerichtete gleiche Ströme führen.

Eindhoven (Holland). M. J. O. Strutt.

(Aus dem Wissenschaftlichen Laboratorium von N. V. Philips Glühlampenfabriken.) 942

[1]) F. Noether, diese Zeitschr. Bd. 7 (1927), S. 453. — Vergl. Zeitschr. f. Phys Bd. 45 (1927), S. 625; Ann. d. Phys. Bd. 85 (1928), S. 781.

[1]) Im Wesen wird hier die altbekannte Bemerkung wiederholt, daß eine Integralgl. erster Art ein Grenzfall einer solchen zweiter Art ist.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung, Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr.-Ing. L. **MANN,** o. Professor an der Technischen Hochschule Breslau. Theorie der Rahmentragwerke auf neuer Grundlage. Mit Anwendungsbeispielen. Mit 76 Textabbildungen. Verlag Julius Springer, Berlin 1927. VI + 123 S. Preis 9 M, geb. 10,50 M.

Durch die Theorie von L. Mann ist ein systematischer Abschluß in den Methoden der Rahmenstatik erreicht worden, bei denen das Tragwerk aus Formänderungsgrößen berechnet wird. Den Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr sind hier Elastizitätsgleichungen gegenübergestellt, die aussagen, daß die bei den Verzerrungen auftretenden elastischen Kräfte den äußeren Lasten das Gleichgewicht halten.

Ein ebenes Rahmentragwerk habe s Stäbe und n freie Knoten, das sind Knoten, bei denen mindestens 2 Stäbe zusammenstoßen. Wenn man sämtliche steifen Anschlüsse bis auf je einen an den freien Knoten durch Gelenke ersetzt, so entsteht eine kinematische Kette mit p Freiheitsgraden. Wird der letzte Anschluß am Knoten auch aufgehoben, so erhält man infolge der Drehbarkeit der Knoten ein kinematisches Gebilde von $n+p$ Bewegungsfreiheiten. — Die Biegungstheorie ergibt für einen Stab, der an beiden Enden von Biegungsmomenten ergriffen ist, die Winkel zwischen den Endtangenten der Elastica und der ursprünglichen Stabachse in einer linearen Beziehung zu den Endmomenten. — Beim Rahmenwerk ist der Verzerrungszustand durch die $2s$ Endwinkel α gegeben, wenn die Längenänderungen der Stäbe zunächst als bekannt angesehen werden. Diese $2s$ Winkelwerte sind aber nicht voneinander unabhängig. Für jedes Stabende hat man geometrische Zusammenhänge der Form $\alpha = \gamma + \varphi$, γ ist der Knotendrehwinkel, φ der Stabdrehwinkel. Aus Plänen der gedrehten Geschwindigkeiten werden, der $p$fachen Bewegungsfreiheit der Stabkette entsprechend, p virtuelle Stab-

drehwinkel bestimmt. Die wirklichen erhält man durch Multiplikation der virtuellen mit erst zu ermittelnden Zahlen μ aus einer linearen Zusammensetzung. Der Biegungszustand ist daher durch n Größen γ und p Größen μ festgelegt und diese $n+p$ Unbekannten bezeichnet L. Mann als Grundkoordinaten. Ihre Berechnung erfolgt aus den Gleichgewichtsbedingungen des Gebildes mit $n+p$ Freiheitsgraden. Man hat n Knotengleichungen, da bei Gleichgewicht kein Knoten eine Drehung ausführt, und p Gleichungen für den Gleichgewichtszustand der Stabkette. Drückt man hierbei die Momente durch die Grundkoordinaten aus, so bekommt man die vorerwähnten Elastizitätsgleichungen.

Der Verfasser entwickelt die Elastizitätsgleichungen auch aus dem Energieprinzip, betrachtet Stäbe mit veränderlichem Querschnitt und verallgemeinert schließlich die Ansätze und dehnt sie auf gekrümmte Stäbe aus. Als Beispiele werden insbesonders Bogenträger und Stockwerkrahmen herangezogen; beim beiderseits eingespannten Bogen sind für die Zahlenrechnung wesentliche Fehleruntersuchungen über den erforderlichen Genauigkeitsgrad angeschlossen.

Das Verfahren von L. Mann ist nicht allein von theoretischem Interesse; infolge seines übersichtlichen Aufbaues und der einfachen Handhabung ist es ein geeignetes Mittel zur Berechnung von komplizierten Rahmenwerken.

J. Ratzersdorfer. 977

Dr.-Ing. WILHELM FLÜGGE, Die strenge Berechnung von Kreisplatten unter Einzellasten mit Hilfe von krummlinigen Koordinaten und deren Anwendung auf die Pilzdecke. Mit 25 Textabb. Julius Springer, Berlin 1928. 55 S. Preis 5 M.

Dr.-Ing. OTTO PICHLER, Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Mit 6 Textabb. 60 S. Julius Springer, Berlin 1928. Preis 4,50 M

Unter den Problemstellungen, die die Theorie der elastischen Platte mit sich bringt, gestattet die der kreisförmig begrenzten gleichförmig dicken Platte eine exakte Lösung mit Hilfe elementarer Funktionen. Hr. Flügge führt in dem kleinen Büchlein diese Lösung in allen Einzelheiten durch, wie es für die Bedürfnisse des Bauingenieurs erwünscht ist.

Eine andere Aufgabe stellt sich Hr. Pichler, der für den Fall veränderlicher, aber axial symmetrischer Plattendicke Näherungslösungen rechnerischer und zeichnerischer Art im Rahmen der gebräuchlichen Methoden entwickelt. Beide Arbeiten werden als Ergänzung zu der vorhandenen Lehrbuch-Literatur willkommen sein.

Mises.

Dr.-Ing. KARL FEDERHOFER, o. Professor an der Technischen Hochschule Graz. Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Mit 48 Abb. im Text und auf 5 Tafeln. Julius Springer, Wien 1928. VII + 81 S. Preis 9,50 M.

Die Kinematik und Statik der gegliederten Systeme, die vom Standpunkt der technischen Mechanik bis vor kurzem ausschließlich nur für den ebenen Fall betrachtet wurde, erfährt neuerdings eine erfreuliche Ausdehnung auf räumliche Problemstellungen. Das vorliegende Büchlein behandelt neben den allgemeinen Fragen der räumlichen Bewegung einige für die Anwendungen wichtige Aufgaben über das sphärische Kugelgetriebe, die Bewegung der Taumelscheibe und anderes. Durchgängig benutzt wird die ebene Abbildung der Raumvektoren, wie sie vom Referenten in Uebereinstimmung mit den von B. Mayor herrührenden Ansätzen 1913 entwickelt worden ist.

Mises.

Dr. techn. Ing. R. LÖWY, Oberingenieur der Leobersdorfer Maschinenfabriks-Aktien-Gesellschaft Leobersdorf bei Wien. Druckschwankungen in Druckrohrleitungen. Mit 45 Abb. im Text und 7 Tafeln. Julius Springer, Wien 1928. V + 162 S. Preis brosch. 15 M.

Die Druckschwankungen, die in langen Rohrleitungen infolge von Unregelmäßigkeiten der Wasserabnahme entstehen, bilden ein für den praktischen Hydrauliker sehr ernstes Problem. Eine Zusammenfassung der wesentlichen theoretischen Gesichtspunkte gab zum ersten Mal das später auch ins Deutsche übersetzte Buch von Allievi 1904. Das vorliegende Werk bringt einleitend eine allgemeine Untersuchung der Wasserbewegung unter Berücksichtigung der elastischen Nachgiebigkeiten. Der Hauptteil des Buches enthält die Aufstellung und Diskussion der schon von Allievi gegebenen Gleichungen, wobei auf viele für die praktischen Berechnungen wichtigen Einzelheiten eingegangen wird. Bemerkenswert ist hierbei auch eine Abschätzung des Einflusses der Reibung, über den freilich noch manches zu sagen wäre. Im ganzen erscheint das Buch, das sich in der Darstellungsform den Bedürfnissen des Ingenieurs anpaßt, als eine erfreuliche Bereicherung der hydraulischen Literatur.

Mises.

Dr.-Ing. H. B. BADER, Handbuch für Flugzeugführer. Unter Mitwirkung von Barth, Blume, Boykow, Goßlau, Lempertz, Leonhardy, v. Mitterwallner. Mit 91 Abb. und 7 Zahlentafeln. VdI-Verlag G. m. b. H. 1928. 193 S.

Der Herausgeber hat sich die Aufgabe gestellt, für angehende Flugzeugführer, die nicht Ingenieure sind, die Anfangsgründe der verschiedenen Wissensgebiete, die für sie in Frage kommen, zusammenzustellen. Er hat dabei die Form eines Sammelwerks verschiedener Autoren gewählt, was gewiß den Vorteil größerer Sachkunde mit sich bringt, aber doch die Einheitlichkeit mehr stört, als es bei einem solchen kleinen Handbuch nötig gewesen wäre. Ueber die eigentliche Mechanik des Fluges wird nur sehr weniges, und zwar vom Herausgeber selbst, ohne jedes Eingehen auf rech-

nerische Beziehungen gesagt Am wertvollsten sind vielleicht die Abschnitte über das Triebwerk von Goßlau und büer Flugzeuginstrumente von Boykow. Jedenfalls wäre dem Büchlein, solange es Flugzeugführer gibt, die nicht über weitergehende technische Vorbildung verfügen, größte Verbreitung in den in Frage kommenden Kreisen zu wünschen.

Mises.

Dr. phil. ADOLF **FRAENKEL,** ord. Professor an der Universität Kiel. Einleitung in die Mengenlehre. Dritte umgearbeitete und stark erweiterte Auflage. Mit 13 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. IX. Springer, Berlin 1928. XIII + 424 S. Preis 22,60 M, geb. 24 M.

Wenn auch die Mengenlehre, nach dem heutigen Stand der Dinge, als der angewandten Mathematik ziemlich ferne liegend gelten muß, scheint mir eine Anzeige dieses Buches hier doch sehr am Platz zu sein. Es ist in seiner jetzigen Gestalt hervorgegangen aus einem kleinen Büchlein aus der Kriegszeit, in dem der Verfasser mathematische Unterhaltungen mit Nicht-Mathematikern wiedergegeben hatte. In der Tat wird der behandelte Stoff dem Laien durchaus nicht so fremd erscheinen, wie es zunächst den Anschein haben könnte. Ja, derjenige, der nicht Mathematik studiert hat, aber Interesse für mathematische Denkweise besitzt, wird kaum einen anziehenderen Gegenstand finden, als den der modernen Mengenlehre. Ein großer Teil des vorliegenden Buches ist fast ohne Vorbildung lesbar und so anregend und spannend geschrieben, daß man ihn nur mit Genuß lesen kann. Als besonders reizvoll erscheinen mir die Abschnitte IV und V, in denen die Paradoxien der Mengenlehre und die Versuche zu ihrer Lösung, namentlich auch die Gedankengänge der sog. intuitionistischen Mathematik von E. I. Brouwer dargelegt werden. Das Einzige, was ich als Leser auszusetzen hätte, ist, daß man eine etwas klarere und entschiedenere Stellungnahme des Verfassers zu den heute strittigen Fragen, namentlich hinsichtlich des Intuitionismus, wünschen würde. — Im übrigen ist vielleicht die Zeit, in der Fragen der Mengenlehre für die Anwendungen der Mathematik von Wichtigkeit werden können, gar nicht sehr ferne.

Mises.

Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften. Herausgegeben von der Schriftleitung der »Naturwissenschaften«. Siebenter Band. Mit 63 Abb. Springer, Berlin 1928. 437 Abb. Preis 28,60 M, geb. 29,80 M.

Den früher hier angezeigten Bänden schließt sich der vom Herausgeber der »Naturwissenschaften« Dr. A. Berliner trefflich redigierte neue Band würdig an. Von besonders aktuellen, auch für den Techniker wichtigen Gebieten sei der Bericht von Bartels über die höchsten Atmosphärenschichten genannt. H. Thirring bespricht die Grundlagen der neueren Quantentheorie in ihrer Entwicklung bis 1926 und läßt mit Spannung die Fortsetzung erwarten. Man wird der Redaktion der Naturwissenschaften Dank wissen für die konsequente und gleichmäßige Durchführung der Schriftenreihe.

Mises.

WILHELM **BLASCHKE,** Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen Einsteins Relativitätstheorie. III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Bearbeitet von Gerhard Thomsen, Privatdozent der Mathematik an der Universität Hamburg. Mit 68 Textfiguren. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. XXIX. Verlag Springer, Berlin 1929. X + 474 S. Preis 26 M, geb. 27,60 M.

Der dritte Band der Blaschkeschen Differentialgeometrie ist fast doppelt so umfangreich wie der erste, obwohl er nur ein verhältnismäßig enges Gebiet der Differentialgeometrie behandelt, das der Systeme von Kreisen und Kugeln. Den Ausgangspunkt bilden die von Möbius, Laguerre und Lie erfundenen Kreisabbildungen, von denen die einfachste und auch dem Nicht-Mathematiker geläufigste in der stereographischen Projektion zum Ausdruck kommt. Es ist ein charakteristisches Merkmal des wahren Geometers, sich der Auswertung der vielen, durch solche Abbildungsprinzipe aufdeckbaren Beziehungen mit einer gewissen Liebe hinzugeben. Die beiden Bearbeiter des Bandes lassen es daran nicht fehlen. Ob sie bei sehr vielen Lesern genügende Gegenliebe finden werden, die sich willig dem Studium der 500 Seiten unterziehen, ist vielleicht fraglich. Sicher aber ist, daß jeder, der den klaren und sauberen Ausführungen des Buches mit Aufmerksamkeit folgt, daran großes Vergnügen finden wird.

Für spätere Neubearbeitungen des Gesamtwerkes darf man wünschen, daß die im ersten Band vorgetragenen Grundlagen der allgemeinen Kurven- und Flächengeometrie etwas ausführlicher und in einer dem Lernenden etwas entgegenkommenden Breite behandelt würden; die späteren Teile könnten vielleicht eher eine Kürzung erfahren.

Mises.

ALWIN **WALTHER,** o. Professor für Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Einführung in die mathematische Behandlung naturwissenschaftlicher Fragen. Erster Teil: Funktion und graphische Darstellung der Differential- und Integralrechnung. Mit 174 Abb. Julius Springer, Berlin 1928. VIII + 220 S. Preis 8,60 M, geb. 9,60 M.

Das Buch sollte ursprünglich nur als einleitender Beitrag zu einer »Methodik der wissenschaftlichen Biologie« erscheinen. Vielleicht wäre es hier am Platze gewesen, als selbständiges Werk unter dem anspruchsvollen Titel hat es wenig Berechtigung. Der Ver-

fasser glaubt, einen neuen Weg zur Erwerbung mathematischer Kenntnisse gefunden zu haben. Es sei ein Irrtum, wenn man meint, beim Studium eines mathematischen Buches »langsam und schrittweise Zeile nach Zeile, Seite nach Seite bewältigen« zu müssen. »Man lese rasch, gehe über Schwierigkeiten zunächst ruhig hinweg«. Allerdings ist es auch die Ansicht des Referenten, daß man kaum etwas anderes tun könne, als möglichst rasch darüber hinwegzulesen, wenn man etwa auf S. 124 unter der fett gedruckten Ueberschrift »Allgemeines Integrationsprinzip« die folgende, durch Kursivdruck hervorgehobene Formulierung findet:

»Man habe sich bei konstantem y mit einer Größe $y \cdot s$ beschäftigt, wobei s als Differenz $b-a$ einer Veränderlichen x zwischen $x=a$ und $x=b$ ausgedeutet werden kann. Dann wird diese Größe, falls y eine Funktion $y=f(x)$ von x ist, durch das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ gegeben und kann entweder auf irgendeine Weise unmittelbar als Fläche der Kurve $y=f(x)$ von $x=a$ bis $x=b$ oder über eine Stammfunktion zum Differential $f(x)\,dx$ hinweg gefunden werden.«

In diesem Stil verläuft die Auseinandersetzung an vielen wesentlichen Stellen. Ueberhaupt scheint das Bestreben, originell zu wirken, das Hauptaugenmerk des Verfassers zu bilden.

Den deutschen Verlegern, die sich oft über die allzu starke Ueberproduktion an Büchern beklagen, möchte man den Rat geben, einmal zehn Jahre lang keine neue »Einführung in die höhere Mathematik« zu veröffentlichen. Wir besitzen genug, zum Teil vortreffliche, Bücher und wirklich fruchtbare neue Gedanken sind auf diesem Gebiet sobald nicht zu erwarten. Mises.

Dr. LUDWIG **HÄNERT,** Marinestudienrat in Mürwik. Geschütz und Schuß. Eine Einführung in die Geschützmechanik und Ballistik. Mit 154 Textabb. VII + 359 S. Berlin 1928, Springer. Preis geb. 29 M.

»Das vorliegende Buch, das auf Veranlassung der Sektionen des Bildungswesens und der Artillerie geschrieben ist, soll eine Einführung in die wissenschaftlichen Grundlagen der heutigen Waffenlehre sein. Es ist in erster Linie für junge See- und Artillerieoffiziere bestimmt. Vielleicht ist es aber auch dem jungen Physiker und Techniker willkommen, der sich für waffentechnische Fragen interessiert« (aus dem Vorwort).

Das Buch ist in drei Kapitel geteilt.

In dem ersten Kapitel wird das Hauptproblem der Inneren Ballistik, nach einem vorbereitenden Studium der Verbrennung des Pulvers im unveränderlichen Raum sowie beim Schuß im Rohr, der Arbeitsleistung und Rohrbeanspruchung des Pulvergases und des Dralls betrachtet.

Das zweite Kapitel ist dem Studium der Mechanik des Geschützes — Rohr und Lafette — gewidmet.

In dem dritten Kapitel kommen die Fragen der Aeußeren Ballistik zur Sprache. Nach einem vorbereitenden Studium des Schusses im luftleeren Raume wird das Hauptproblem der Aeußeren Ballistik gestellt und durch graphische Methoden gelöst. Hier ist auch die analytische Lösung des Problems beim quadratischen Widerstandsgesetz, wie auch eine kurze Andeutung der Methode von Siacci gegeben. Der Messung der Geschwindigkeiten, den photogrammetrischen Untersuchungen der Geschoßbahn und dem Studium des Luftwiderstandes ist reichlicher Platz zugemessen. Das Kapitel endet nach einer kurzen Besprechung des Einflusses von verschiedenen Faktoren auf die Schußelemente mit dem Studium der Streuung nach dem Gaußschen Fehlergesetz. Ueberall vorwiegend sind die graphischen Darstellungsmethoden gebraucht. Die mathematischen Hilfsmittel sind die, welche in den beiden ersten Semestern auf jeder Hochschule vorgetragen werden.

Das Buch ist klar und wird mit großem Interesse von jedem jungen Artillerieoffizier gelesen werden. Einige Artikel, wie z. B. die über die Festigkeit des Geschützes und über den Luftwiderstand bieten großes Interesse auch für Physiker und Techniker.

Sofia. K. Popoff. 988

FELIX **AUERBACH,** Lebendige Mathematik. Eine allgemein verständliche Einführung in die Schau- und Denkweise der niederen und höheren Mathematik. Mit zahlreichen Beispielen aus allen Gebieten des Lebens, der Natur und Kunst, der Wissenschaft und Technik. Verlag Ferdinand Hirt in Breslau 1929. 354 S. Preis geh. 7,80 M.

Auerbach wendet sich in diesem Buch an alle, »die den Wunsch haben, sich von ihrer Furcht vor der Mathematik zu befreien«. Um diese Furcht zu bannen, zeigt er zunächst, daß Mathematik nicht weltfremde Büchergelehrsamkeit ist, sondern ihre Probleme oft direkt aus dem Alltag holt. Dann führt er den Leser, ohne wesentliche, d. h. über den Rahmen der unteren Mittelschulklassen hinausgehende Kenntnisse vorauszusetzen, in die verschiedensten Gebiete mathematischen Denkens ein. Fragen aus der Kurventheorie, der Zahlentheorie, der Theorie der reellen Funktionen, der Differential- und Integralrechnung, der Statistik und der Theorie der Differentialgleichungen werden mit großem pädagogischen Geschick erörtert. Daß die Darstellung nicht immer den Forderungen völliger mathematischer Strenge entspricht, ist, da es sich um ein populäres Werk handelt, von nicht allzu großer Bedeutung.

Jedenfalls bietet das Buch so viel an Mathematik, als man ohne eingehendes Studium überhaupt kennen lernen kann, und ist daher jedem Freund dieser Wissenschaft wärmstens zu empfehlen.

Wien, Elise Helly. 993

Dr.-Ing. EWALD **PERTZ,** Die Bestimmung der Baustoffdämpfung nach dem Verdrehungsausschwingverfah-

ren. Mit 42 Abbildungen und mit einem Vorwort von Prof. Dr.-Ing. O. Föppl, Braunschweig. Sammlung Vieweg H. 91. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1928. 62 S. Preis geh. 3,60 M

In neuerer Zeit werden hochbeanspruchte Baustoffe vielfach durch dynamische Prüfungen untersucht. Man erhält dann die Schwingungsfestigkeit und die Dämpfungsfähigkeit. Mit der letzteren befaßt sich das vorliegende Buch, in dem eine Maschine zur Bestimmung der Dämpfungsfähigkeit beschrieben ist.

Der Verfasser der Abhandlung zeigt einen Weg, der die Ermittlung der dynamischen Zähigkeit in recht einfacher Weise mittels des Verdrehungs-Ausschwingversuches gestattet. Der Gedanke an sich ist zwar nicht neu. Das Verdienst des Verfassers jedoch ist es, durch die Entwicklung zweckmäßiger Maschinen und durch Schaffung weitgehender theoretischer und praktischer Grundlagen die Methode für die Praxis erst brauchbar gemacht zu haben. Um verschiedenartige Formen von Versuchsstäben vergleichen zu können, hat der Verfasser ferner die Beziehungen zwischen der beim Verdrehungs-Ausschwingungsversuch erhaltenen mittleren Dämpfung und der Randdämpfung als der eigentlichen physikalischen Baustoffeigenschaft in klarer, leicht verständlicher Weise entwickelt.

Braunschweig. K. Günther. 1000

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

FEDERIGO **ENRIQUES,** Zur Geschichte der Logik. Grundlagen und Aufbau der Wissenschaft im Urteil der mathematischen Denker. Deutsch von L. Bieberbach. Wissenschaft und Hypothese XXVI. Verlag von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1927. 240 S. Preis geb. 11 M.

WALTHER **GERLACH,** o. ö. Professor an der Universität Tübingen. Ueber das Wesen physikalischer Erkenntnis und Gesetzmäßigkeit. Philosophie und Geschichte. Eine Sammlung von Vorträgen und Schriften aus dem Gebiet der Philosophie und Geschichte. Nr. 16. 30 S. Verlag J. C. B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen 1927. Preis 1,50 M.

L. GUSTAVE **DU PASQUIER,** Docteur ès sciences, Professeur de mathématiques supérieures à l'Université de Neuchâtel. Léonard Euler et ses amis. Avec un portrait de Léonard Euler. Librairie Scientifique J. Hermann, Paris 1927. IX + 125 S. Preis 22 Fr.

FELIX **KLEIN,** Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Dritte Auflage. Zweiter Band: Geometrie. Ausgearbeitet von E. Hellinger. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 157 Abb. Bd. XV d. Grundl. usw. XI + 302 S. Springer, Berlin 1925. 15 M, geb. 16,50 M. — Dritter Band: Präzisions- und Approximationsmathematik. Ausgearbeitet von C. H. Müller. Für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von Fr. Seyfarth. Mit 156 Abb. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. XVI. Julius Springer, Berlin 1928. X + 338 S. Preis 13,50 M, geb. 15 M.

Prof. Dr. HANS GEORG **MÖLLER,** Direktor des Instituts für angewandte Physik an der Hamburgischen Universität. Behandlung von Schwingungsaufgaben mit komplexen Amplituden und mit Vektoren. Mit 91 Abb. und 1 Tafel. S. Hirzel, Leipzig 1928. X + 128 S. Preis geh. 6 M, geb. 8 M.

Dr.-Ing. AUGUST **HUND,** Fellow of the Institute of Radio Engineers. Fellow of the American Physical Society. Hochfrequenzmeßtechnik. Ihre wissenschaftlichen und praktischen Grundlagen. Zweite vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 287 Textabb. Julius Springer, Berlin 1928. XVIII + 526 S. Preis geb. 39 M.

L. **BALSER,** Oberstudienrat an der Liebig-Oberrealschule in Darmstadt. Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze). Mit 40 Figuren im Text. Mathematisch-Physikalische Bibliothek. Nr. 81. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1928. 59 S. Preis kart. 1,20 M.

Professor G. **SUNDBY,** Prover med Modellturbiner for Morkfoss-Solbergfossanlegget. Meddelse fra Norges Tekniske Heiskoles Vankraftlaboratorium. F. Bruns Bokhandel, 1928. 80 S.

AKIRA **MIURA,** Professor an der Kaiserlichen Universität Kioto. Spannungskurven in rechteckigen und keilförmigen Trägern. Theorie und Versuch über Spannungsverteilung als Scheibenproblem mit besonderer Berücksichtigung der lokalen Störung. Mit 142 Abb. im Text und auf 6 Tafeln. Julius Springer, Berlin 1928. V + 111 S. Preis 11 M, geb. 12,50 M.

Dr. ALFRED **HARNACK,** Studienrat an der Marine-(Ingenieur-)Schule in Kiel. Angewandte Differential- und Integralrechnung. Mit 76 Figuren im Text. Studienbücher d. Mathematik, Naturwissenschaften u. d. Technik Bd. 1. Verlag Otto Salle, Berlin 1928. VII + 265 S. Preis 10 M.

Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule Aachen. Herausgegeben von Professor Dr. Th. v. Kármán. Heft 8. Bestehend aus Sonderdrucken der in dieser Zeitschrift Bd. 7 und 8 erschienenen Arbeiten von Lennertz, Hansen und Fritsch. Julius Springer, Berlin 1928. 62 S. Preis 6 M.

E. **STUDY,** Denken und Darstellung in Mathematik und Naturwissenschaften. Zweite verbesserte und erweiterte Auflage. Mit 10 Abb. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., Braunschweig 1928. Preis geh. 3,75 M.

ARNOLD **BERLINER,** Lehrbuch der Physik in elementarer Darstellung. Vierte Auflage. Mit 802 Abb. Julius Springer, Berlin 1928. Preis geb. 19,80 M.

A. B. **SCHERSCHEVSKY,** Die Rakete für Fahrt und Flug. Verlag C. J. E. Volckmann, Berlin 1928. Preis kart. 4,50 M, geb. 6 M.

MAX **VALIER,** Vorstoß in den Weltenraum. Eine technische Möglichkeit. 5. Auflage. R. Oldenbourg, München und Berlin 1928. 263 S. Preis kart. 8,50 M.

MUES-SCHWARZ, Mathematisches Unterrichtswerk. Arithmetik und Algebra. Heft II, Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster 1928. S. 109—162. Preis 1,80 M.

ROBERT **FRICKE,** Lehrbuch der Algebra, verfaßt mit Benutzung von Heinrich Webers gleichnamigem Buche. Dritter Band: Algebraische Zahlen. Mit 41 in den Text gedruckten Figuren. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1928. VII + 506 S. Preis geh. 19,50 M, geb. 22,50 M.

S. **TIMOSHENKO,** Prof. der Mechanik an der Universität of Michigan, Ann Arbor; vorm. an den Techn. Hochschulen Kieff und Petersburg, und I. M. **LESSELS,** Masch.-Ingenieur d. Research Dept. Westinghouse Electrican Mfg. Co. Festigkeitslehre. Ins Deutsche übertragen von Dr. I. Malkin, Ingenieur. Mit 391 Abb. i. Text. Springer, Berlin 1928. XVII + 484 S. Preis geb. 28 M.

Handbuch der Experimentalphysik. Herausgegeben von W. **WIEN**-München und F. **HARMS**-Würzburg unter Mitarbeit von H. **LENZ**-München. Bd. 7, 2. Teil: Dr. H. **OTT,** Priv.-Doz. a. d. Univ. München. **Strukturbestimmung mit Röntgeninterferenzen.** Mit 187 Abb. u. 7 Taf. Dr. K. F. **HERZFELD,** o. Prof. a. d. Univ. Baltimore, Gittertheorie der festen Körper. Mit 9 Abb. Akademische Verlagsges., Leipzig 1928. XII + 433 S.

Prof. Dr. PAUL **CRANTZ,** weil. Geheimer Studienrat. Sphärische Trigonometrie nebst Anwendungen zum Selbstunterricht. Zweite Auflage neubearbeitet von Dr. M. Hauptmann, Studienrat an der Höh. Maschinenbauschule der Stadt Leipzig. Mit 114 gelösten Aufgaben, 67 Fig. und einem Nomogramm des allgemeinen Kegeldreiecks. Aus Natur und Geisteswelt Bd. 605. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. 107 S. Preis geb. 2 M.

Dr. G. **HOHEISEL,** a. o. Professor an der Universität Breslau. Partielle Differentialgleichungen. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1928. Samml. Göschen Nr. 1003. 159 S. Preis 1,50 M.

Prof. W. **IMMLER,** Elsfleth, Leitfaden der Flugzeugnavigation. Mit 57 Textabb., 15 Rechentafeln und 13 Tabellen im Anhang. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1928. VI + 89 S. Preis geb. 12,50 M.

GIULIO **VIVANTI,** ord. Professor an der Universität Mailand. Elemente der Theorie der linearen Integralgleichungen. Uebersetzt und mit Anmerkungen versehen von Friedrich Schwank, Darmstadt. Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hannover 1929. XI + 296 S. Preis geh. 15,60 M, geb. 16,60 M.

P. **DEBYE,** Probleme der modernen Physik. Mit 52 Abb. im Text. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1928. VIII + 221 S. Preis geh. 18 M, geb. 19,50 M. Arnold Sommerfeld zum 60. Geburtstag gewidmet von seinen Schülern.

Dr.-Ing. F. **BUNDSCHU,** Angewandte Hydraulik. Mit 55 Abb. im Text. Springer, Berlin 1929. 75 S. Preis 6,90 M.

R. **LUNDHOLM,** Das Rechnen mit Vektoren in der Elektrotechnik. Centraltryckeriet, Stockholm 1928. 98 S.

S. **TIMOSHENKO,** Professor of Engineering Mechanics University of Michigan. Vibrations Problems in Engineering. D. van Nistrand Company, Inc. New. York 1928. VI + 351 S

THEODOR **PÖSCHL,** Methoden und Probleme der Elastizitätstheorie. Rede, gehalten am 5. November 1928 anläßlich der Uebernahme der Professur für Mechanik und angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. Preis 1,75 M.

Dr.-Ing. K. **KAMMÜLLER,** Privatdozent an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Die Theorie der Gewichtsstaumauern unter Rücksicht auf die neueren Ergebnisse der Festigkeitslehre. Mit 25 Textabb. Springer, Berlin 1929. VI + 60 S. Preis 5,40 M.

ERNST **LAMPE,** Studiendirektor der Oberrealschule Elsterschloß in Elsterwerda. Mathematik und Sport. Mathematische und physikalische Aufgaben aus dem Gebiete der Leibesübungen. Mit 34 Figuren im Text und einem Titelbild. Mathem.-physikal. Bibliothek Nr. 74. Verlag G. B. Teubner, Leipzig und Berlin 1929. 56 S. Preis kart. 1,20 M.

Rendiconti del Seminaro Matematico e Fisico di Milano. Vol. II (1928 — VI). Libreria Editrice Politecnica Milano 1929. X + 199 S.

HENNING **KAUFMANN,** Rythmische Phänomene der Erdoberfläche. Mit 15 Abb. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. 347 S. Preis 14 M, geb. 16 M.

FRIEDRICH **RINNE,** Zur Nomenklatur der 32 Kristallklassen. — ERNST **SCHIEBOLD,** Ueber eine neue Herleitung und Nomenklatur der 230 kristallographischen Raumgruppen. Mit Atlas der 230 Raumgruppen-Projektionen, enthaltend 313 schwarze und 36 farbige Abb. auf 46 Tafeln. Des XL. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften, Nr. V, Schlußheft. Verlag Hirzel, Leipzig 1929. Text 204 S., Atlas 22 S. u. 46 Tafeln. Preis je 13 M.

Dr. PAUL **OTTO,** Oberbibliothekar im Reichspatentamt. Technischer Literaturkalender. Dritte Ausgabe 1929. Unter Befür-

wortung durch den deutschen Verband Technisch-wissenschaftlicher Vereine herausgegeben. Verlag R. Oldenbourg, München und Berlin 1929. 736 S. Preis geb. 24 M.

Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch - Physikalische Klasse, Achtzigster Band 1928. IV. Verlag S. Hirzel, Leipzig 1928. 203—272 S. Preis geh. 2,60 M.

Dr. EMIL **MÜLLER,** o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. Vorlesungen über Darstellende Geometrie. II. Band: Die Zyklographie. Aus dem Nachlaß herausgegeben von Dr. JOSEF LEOPOLD **KRAMES,** Privatdozent an der Technischen Hochschule in Wien. 208 Textfiguren. Verlag Franz Deuticke, Leipzig und Wien 1929. IX + 476 S., Preis 38 M.

Dr. PAUL **LORENZ,** wiss. Mitarbeiter im Institut für Konjunkturforschung. Der Trend. Ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven. Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung. Herausgegeben vom Institut für Konjunkturforschung. Leiter: Prof. Dr. ERNST **WAGEMANN**. Sonderheft 9. Verlag Reimar Hobbing, Berlin 1928, 57 S., Preis 9 M.

ARTHUR **HAAS,** Dr. phil. Professor für Physik an der Universität in Wien. Atomtheorie. Mit 64 Figuren im Text und auf vier Tafeln. Zweite völlig umgearbeitete und wesentlich vermehrte Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig 1929, VIII + 258 S., Preis 10 M., geb. 11,50 M.

THEODOR **VAHLEN,** Deviation und Kompensation. Neue Grundlegung der Theorie. Neue Anwendung auf die Praxis. Mit 27 Abb. Verlag von Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1929. VIII + 180 S. Preis geh. 7,60 M., geb. 9,60 M.

W. **ZANDER.** Der Einfluß von Oberflächenbeschädigungen auf die Biegungsschwingungsfestigkeit. Nem-Verlag, Berlin. 65 S.

Der Aerokartograph. Nach Prof. Dr.-Ing. **HUGERSHOFF.** Der Aufbau der Gerätes in Theorie und Praxis. Bearbeitet von Dipl.-Ing. H. **GRUNER**. Kommissionsverlag Konrad Wittwer, Stuttgart 1929. 31 S., Preis geb. 2,50 M.

Dr. KUNO **FLADT**, Studienrat an der Friedrich-Eugens-Oberrealschule in Stuttgart. HANS **SEITZ**, Studienrat an der Oberrealschule in Heilbronn. Astronomie zum Gebrauch an den oberen Klassen der höheren Schulen, für jüngere Studierende und zum Selbststudium. Mit 103 Textfiguren, 43 Abb. auf Tafeln und ein Titelbild. Verlag von Adolf Bonz & Co., Stuttgart 1929. 304 S., Preis geh. 6 M., geb. 6,80 M.

F. F. P. **BISACRE**, O. B. E, M. A. (Cantab), B. SC. (Lond), A. M. Inst. C. E. Praktische Infinitesimalrechnung. Berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von Prof. Dr. E. **TREFFTZ**, Dresden, herausgegeben von Dr. phil. ERNST **KÖNIG** in Elberfeld. Mit 104 Abb. und 5 Bildnistafeln. Verlag B. G. Teubner Leipzig und Berlin 1929. XI + 364 S., Preis 18 M.

Dr. WERNER **KRAMER**, Einführung in die darstellende Geometrie. II. Teil: Senkrechte Projektion auf zwei Tafeln. Kegelschnitte. Mit 67 Figuren im Text. Mathem.-Physikal. Bibliothek, Bd. 67. Verlag B. G. Teubner Leipzig und Berlin 1929. 52 S., Preis 1,20 M.

Dr. A. **SCHÜLKE**, Oberstudiendirektor i. R. Berlin. Vierstellige Logarithmentafeln nebst Hilfstafeln für das praktische Rechnen. D. R. G. M. Ausgabe B. Mit Anhang: Mathematische Formeln. Achtzehnte verbesserte Auflage. Verlag B. G. Teubner, Leipzig und Berlin. 38 S., Preis 2 M.

NACHRICHTEN

Zum 70. Geburtstage A. Stodolas. Als Stodola vor 49 Jahren seine Studien beendete, war der praktische Maschinenbau noch fast vollständig ein Gebiet der sogenannten »Erfahrung«. Einige empirische Formeln und ein allerdings oft überraschend richtiges Gefühl für Form und Festigkeit beherrschten die Konstruktion und nur ganz wenige Aufgaben überließ man — und diese nur mit einigem Mißtrauen — der »Theorie«, etwa einfache Festigkeitsrechnungen, geometrische oder kinematische Ausmittlungen und ähnliches. Die großen Arbeiten Grashofs z. B. oder gar die der bedeutenden Physiker jener Zeit blieben in der Praxis fast unbeachtet und wenigen begeisterten Schwärmern überlassen. Und nun haben diese Schwärmer, zu denen Stodola in erster Linie gehörte, das Feld behauptet und dem Maschinenbau ein ganz neues Gepräge verliehen, so daß wir Stodola als Führer und Wegbereiter, als Vorbild und Vertreter des modernen Maschinenbaues ansehen. Wenn es sonst auch schwierig ist, festzustellen, wie der technische Fortschritt zustande kommt, weil er sich oft aus einer Summe bescheidener, unbeachteter Ideen entwickelt, so erblicken wir hier eine merkliche Unstetigkeit, einen bedeutenden Sprung nach aufwärts. Und wie einfach ist das Leben verlaufen, das ihn bewirkt hat!

Stodola wurde in einem kleinen slowakischen Städtchen, Lipto Sv. Mikulaš, am 11. Mai 1859 geboren, besuchte die Volksschule in Vrbice Sv. Mikulaš und kam dann zur Erlernung der deutschen Sprache zu einer deutschen Familie in der Zips. Nach Beendigung des Realschulstudiums in Leutschau und Kaschau, wo er stets der Erste der Klasse war, besuchte er das Polytechnikum in Budapest und im Jahre 1878 das damals schon berühmte Eidgenössische Polytechnikum in Zürich, wo er

1880 das Diplom mit Auszeichnung erwarb. Nach vorübergehender Werkstättenpraxis bei der kgl. ungarischen Staatseisenbahn drängte es den Jüngling zu weiteren Studien nach Berlin, wo er Helmholtz, Du Bois-Reymond und Adolf Wagner hörte. 1884 ging er als Volontär zu Hartmann-Lachapelle nach Paris, dann für einige Zeit in die Heimat, um den Aufbau der Riemenfabrik seines Vaters zu leiten. Nach kurzer Werkstättenpraxis bei der Böhmisch-Mährischen Maschinenfabrik in Prag, die ihn nicht befriedigte, suchte er 1887 Anstellung bei der Prager Maschinenbau-A.-G. vormals Ruston & Co., einer damals im Dampfmaschinenbau führenden Firma, deren Direktoren C. Ludwik und M. Kubin ihn bald als ganz hervorragenden Konstrukteur erkannten, und ihm die bedeutendsten Arbeiten übertrugen. Nun zeigte sich der Gewinn, den Stodola aus seinen Hochschulstudien und besonders auch aus den freien Studien der vorhergegangenen Jahre gezogen hatte. Denn in den fünf Jahren seines Verbleibens bei Ruston hat er mit unvergleichlicher Eleganz und Feinheit die damals größten Dampfmaschinen, unterirdische Wasserhaltungsmaschinen, eine Verbund-Balancier-Gebläsemaschine, einige Schiffsmaschinen für Binnenschiffe entworfen, was zu jener Zeit der Einzelherstellung ohne brauchbare Vorbilder und Normalien ganz anders gewertet werden muß, als etwa heute. Aber auch jetzt noch bietet es dem Kenner einen geradezu ästhetischen Genuß, eine der von Stodolas Meisterhand stammenden Zeichnungen zu sehen. Schon damals zeigten sich auch seine didaktischen Fähigkeiten im Verkehr mit seinen Kollegen Radovanovic, Prášil, Baudiss und mit seinen jüngeren Freunden. Stets trug er ein Blatt Papier mit sich, um ihnen Ideen, Berechnungen, Skizzen vorzuführen, bei jeder Zusammenkunft gab er neue Anregungen und Erklärungen. Es mag als Zeichen der Verehrung seiner engeren Prager Freunde für Stodola angeführt werden, daß diese, als er 1892 nach Zürich berufen war, und nach einer größeren Reise sich vor seinem Amtsantritt einige Tage in Dresden aufhielt, ihn dort gemeinsam aufsuchten, um noch einmal von ihm Abschied zu nehmen.

Diese Berufung erfolgte durch die Menschenkenntnis des Schulrats-Präsidenten Bleuler nur auf Grund der seinerzeitigen glänzenden Diplom-Prüfung in Zürich und einiger Prager Empfehlungen, da Stodola bis dahin öffentlich nicht hervorgetreten war. Kaum fühlte er aber die Freiheit und die Pflichten des Lehrberufes, so erschien schon 1893 seine erste, durch ein praktisches Vorkommnis angeregte Arbeit, die im Verein mit einer Erweiterung vom Jahre 1894 die indirekte Regelung von Wasserturbinen in Verbindung mit Rohrleitung und Windkessel erstmalig vollständig und wunderbar anschaulich behandelt und erledigt, soweit die Frage der Stabilität vorliegt, wozu Hurwitz die berühmten, allgemeinen mathematischen Kriterien gab. Nach der Behandlung allgemeiner Fragen des Unterrichts und einigen Versuchsberichten folgte 1898 die wichtige Arbeit über die Kreisprozesse der Gasmaschine, in der die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen der Gase mit der Temperatur in die Praxis eingeführt und eine strengere Behandlung der Wärmevorgänge in eleganter Weise ermöglicht wurde. Gleich das folgende Jahr brachte die die kinetischen Verhältnisse der Beharrungsregler restlos aufklärenden Abhandlungen Stodolas, in denen nebenbei auch die Biegung der Schraubenfedern in gründlicher Weise behandelt wird. Dann befaßte sich Stodola wieder mit Ausstellungs- und Kongreßberichten, während er die Studien zu seinem Hauptwerk, der Schaffung wissenschaftlicher Grundlagen für den Bau der Dampfturbinen, in aller Stille betrieb. Hier zeigte sich der Weitblick des großen Ingenieurs, der sich nicht durch die momentanen Interessen der Fachgenossen, ja nicht einmal durch ihre offene Gegnerschaft abhalten ließ, der Dampfturbine die große Zukunft vorauszusagen, die sie inzwischen wirklich erreicht hat. Der geradezu verblüffende Eindruck seines im Jahre 1902 im Rahmen der Hauptversammlung des Vereines deutscher Ingenieure in Düsseldorf gehaltenen Vortrages, der 1903 in erweiterter Form zur Veröffentlichung kam, hat in Fachkreisen eine Umwälzung der Ansichten über die Zukunft der Wärmekraftmaschinen hervorgerufen, und nur ganz wenige, in ihrem engen Kreise allzu Befangene konnten der Wirkung dieser in Inhalt und Form vollendeten Darbietung widerstehen. Wer sie objektiv gehört hat, mußte sich gestehen, daß eine neue Periode des Kraftmaschinenbaues angebrochen sei, nicht nur wegen der Erwartungen, die man für die Entwicklung der Dampfturbine hegen mußte, sondern auch wegen der Verbindung der in einwandfreier Versuchsanordnung gewonnenen Ergebnisse mit theoretischen Betrachtungen. Der Vorgang bei der Strömung von Gasen in erweiterten Düsen wurde festgestellt und erklärt und eine vollständige Berechnungsmethode angegeben, die später auf besondere Fälle erweitert wurde.

Stodola hat diesen Sieg auszunutzen verstanden und ist bis heute an der Spitze der Autoritäten auf diesem Gebiete geblieben. Schon im Jahre 1903 erschien ein neuer Aufsatz über die Strömung von Gasen und Dämpfen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt, 1904 eine theoretische Betrachtung über die Umsetzung der Dampfenergie in mechanische Arbeit. Die erste Auflage des berühmten Buches »Die Dampfturbinen« erschien 1903, schon 1904 und 1905 wurden die zweite und dritte Auflage nötig, die sechste Auflage im Jahre 1925 stellt endlich ein Riesenwerk von einer in jeder Hinsicht unvergleichlichen Vollständigkeit dar. Unermüdlich verfolgte Stodola alle einschlägigen Fragen theoretischer Art, alle in Laboratorien und in der Praxis erlangten Beobachtungen, stets mit einer Gründlichkeit und einem Scharfsinn, die in der technischen Literatur kaum ihresgleichen finden. Seine über-

ragende analytische Begabung läßt ihn dennoch stets eine anschauliche und übersichtliche Darstellungsweise finden, die dem Ingenieur nahe liegt. In diesem Buche werden auch nicht allein thermodynamische und Strömungsfragen zum größten Teil in origineller Weise behandelt, sondern ebenso auch alle Aufgaben des Baues, der Festigkeit jener Maschinenteile, die der Dampfturbine besonders angehören, wie rasch rotierender Scheiben und Trommeln u. a. Mit besonderem Interesse behandelt Stodola aber die Schwingungserscheinungen der Wellen und ihre kritischen Drehzahlen unter den verschiedensten Bedingungen und Einflüssen, von Eigengewicht, ungleicher Elastizität, ungleichem Antrieb, Kreiselwirkung, Oelpolstern in den Lagern herrührend. Ueber Scheiben und Wellen erschienen besondere Abhandlungen in den Jahren 1907, 1914, 16, 17, 18, 19, 25, von denen jene über Schwingungserscheinungen der Scheiben und Schaufeln besonders hervorgehoben werden sollen.

Während dieser ungeheuren Arbeit an der Entwicklung der Dampfturbine fand Stodola immer noch Zeit, andere eben in Diskussion stehende Fragen zu erledigen, wie die des mechanischen Wirkungsgrades und der indizierten Leistung der Gasmaschine (1905), die Explosionsturbine (1912), die Aufklärung der ein- und dreidimensionalen Turbinentheorie (1907), und auch noch Versuche an Neukonstruktionen durchzuführen, wie an der hydraulischen Regelung der Sulzerturbine 1911.

Im Jahre 1913 untersuchte Stodola die Unterkühlung beim Ausfluß gesättigten Dampfes und wirkte auch in dieser Frage aufklärend durch Versuche und theoretische Betrachtungen.

Schon in der dritten Auflage der »Dampfturbinen« war in einem Anhang die Theorie der Gasturbine behandelt, die später von Stodola wesentlich erweitert wurde. Die Besprechung der Holzwarthschen Versuchsergebnisse zeigte deren Unhaltbarkeit, führte dann aber zu einer großen Reihe von Einzelfragen, die in der fünften Auflage des Buches zur Behandlung gelangten und insbesondere den Wärmeübergang und die Wärmebeanspruchungen betreffen. Neue Studien Stodolas hierüber aus den Jahren 1926 und 1927 förderten dieses immer mehr in den Vordergrund tretende Gebiet wesentlich. Zu nennen sind noch die praktisch bedeutungsvollen Versuche an neuen Dampfturbinenbauarten (1923, 1925, 1927) und der vom rein menschlichen Standpunkt Stodolas zeugende Vorschlag zur Entwicklung künstlicher Gliedmaßen (1915).

Die vielen wissenschaftlichen Arbeiten und Entdeckungen Stodolas haben ihm eine Reihe von Ehrungen eingebracht, die er jedoch mit seltener Bescheidenheit aufnahm. Alle Berufungen hat er abgelehnt, um in Zürich zu bleiben, Karlsruhe, Hannover, Wien, Budapest, Dresden, Petersburg, Prag, Cambribge (U. S.) konnten ihn nicht für sich gewinnen. Schon 1901 wurde er Ehrendoktor der philosophischen Fakultät der Universität Zürich, 1905 Ehrendoktor der Technischen Hochschule Hannover, später auch der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. 1908 wurde ihm die höchste Auszeichnung des Vereines deutscher Ingenieure, die Grashof-Denkmünze, zuteil, kürzlich wurde er korrespondierendes Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften, die ihm schon 1906 einen Preis verliehen hatte.

Zu der fast verwirrenden Fülle des wissenschaftlichen Lebenswerkes Stodolas muß wiederholt gesagt werden, daß in jeder seiner Originalarbeiten wesentlich Neues und für den Fortschritt Wirksames enthalten war, ganz abgesehen von dem unendlich reichen Inhalt seines Buches. Diese gewaltige Leistung wird aber noch erhöht durch die Tätigkeit Stodolas als Berater der Industrie in Fragen neuer Bauarten und besonderer, schwieriger Aufgaben mehr theoretischer Natur. Dabei hat Stodola seine überragende Stellung nie zu eigennützigen Zwecken verwendet, nie sich zu einfach geschäftlichen Vorteilen mißbrauchen lassen. Nur dort, wo er ein allgemeines Interesse oder einen Fortschritt fördern konnte, hat er mitgearbeitet, dann aber mit dem Aufgebot seines ganzen Wissens. Die Industrie hat diese Tätigkeit denn auch durch eine große Ehrengabe anerkannt, die Stodola allerdings der Hochschule Zürich überwiesen hat.

Stodolas Name als Lehrer hat in der ganzen technischen Welt den besten Klang. Alle seine Schüler, von denen viele hervorragende Stellen einnehmen, rühmen ihm dieselbe wunderbare Klarheit und Anschaulichkeit seines Vortrages, dieselbe Eleganz seiner mathematischen Entwicklungen, die gleiche künstlerische Art seiner Skizzen nach, die wir in der Zeit seiner praktischen Tätigkeit bewundern konnten. Die vollendete Art, fachliche und allgemeine Gedanken in Worte zu fassen, entspricht seiner Beherrschung des Gegenstandes, stets bemühte er sich, von ihm selbst oder anderen gelöste Fragen zur höchstmöglichen Klarheit zu bringen und so auch leichter in anderen Personen weiterzuwirken, ihnen gleichzeitig seine Einsichten zu vermitteln und einen geradezu ästhetischen Genuß zu bieten. Die unerschütterliche Gewissenhaftigkeit, mit der Stodola jedem einzelnen Studenten bei den konstruktiven und Laboratoriums-Uebungen oder wissenschaftlichen Arbeiten behilflich ist, sein Verständnis, begabte Hörer zu eigenen Ideen anzuregen, können vorbildlich genannt werden. Es soll auch nicht unerwähnt bleiben, daß die Züricher Hochschule ihm die Schaffung eines der ersten Maschinenbaulaboratorien verdankt, in dem wissenschaftliche Versuchsarbeiten möglich waren, zu einer Zeit, wo man noch keineswegs allgemein den Wert solcher Anstalten genügend kannte.

So überragend nun Stodola als Ingenieur, Gelehrter und Lehrer gewirkt hat, so hoch steht er auch als Mensch. Alles, was die gebildete Welt schön und gut nennt, hat in ihm einen Bewunderer gefunden, stets beschäftigte er sich, soweit nur die Zeit reichte, mit Lite-

ratur und Kunst, besonders mit seiner geliebten Musik, der er sich aber nach seiner tiefen Art nicht nur als einem Genuß hingab, die er vielmehr gründlich studierte. Der Gedanke, eine Orgel zu bauen, die eine Dynamik durch den Fingerdruck auf die Tasten ermöglicht, beschäftigte ihn lange Zeit und nach gründlichem theoretischem Studium der akustischen Vorgänge ließ er sich eine derartige Orgel bauen, die ihm später viel Freude und Genuß verschaffte. Alle musikalischen Neuerscheinungen regten ihn an, jede wichtige Aufführung in Zürich besuchte er, meist mit der Partitur bewaffnet. Selbst zum Verständnis der neuesten Musik suchte er durch Gustav Mahler einen Uebergang zu gewinnen. Mit gleichem Interesse verfolgte er aber stets die geschichtlichen und sozialen Ereignisse unserer Zeit, immer voll Mitgefühl für die Bedrückten und Empörung über Gewalt und Ungerechtigkeit, stets bereit, Verdienste Anderer anzuerkennen, voll Feinheit und einer Zartheit des Gefühles, die freilich derberen Naturen unbegreiflich bleiben mußte. In allen Lebenstätigkeiten, im Berufe als Ingenieur, Gelehrter und Lehrer, in seiner Familie und im freundschaftlichen Verkehr, in der Verwendung der Mußestunden, ja selbst in seinem Heimatsgefühl gibt es nichts Einseitiges, Egoistisches, alles sieht Stodola von einem hohen, beherrschend geistigen Standpunkt aus an. Nichts Unedles ist in ihm, sein ganzes Leben war Arbeit an Aufgaben der Förderung von Wissenschaft und Technik und er darf stolz wie kaum Einer auf ein halbes Jahrhundert aufopfernder Tätigkeit, auf ein einheitlich der Menschheit gewidmetes Leben zurückblicken.

Prag. K. Körner. 972

Zur Feier des siebzigsten Geburtstages überreichte ein Kreis von Freunden und Schülern dem Jubilar eine von E. Honegger redigierte Festschrift, die neben einer ausführlichen Biographie Stodolas von W. G. Noack mehr als 50 wissenschaftliche Beiträge enthält, darunter einen Aufsatz von Albert Einstein über den gegenwärtigen Stand der Feldtheorie. Die Festschrift ist im Verlage von Orell Füssli, Zürich und Leipzig, mit Unterstützung eines Fonds erschienen, der in der Hauptsache von der Schweizerischen Maschinenindustrie zusammengebracht wurde.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 17. Mai sprach Frh. v. Göler-Berlin über »Das mechanische Verhalten von Messingkristallen«.

Am 14. Juni fand ein Vortrag von Hrn. Dr. P. Lorenz-Berlin über »Einige Differentialgleichungen der Wirtschaftsforschung« statt.

Ortsgruppe Göttingen.

Am 11. Juni berichteten die Herren Prof. Dr. L. Prandtl und Dr. W. Tollmien-Göttingen über die Entstehung der Turbulenz.

Prager Mitglieder.

Am 18. April sprach Hr. Dr. Miloslaw Hampl-Prag über »Die Beanspruchung der Halbkugelschale endlicher Wandstärke durch den hydrostatischen Druck«; am 2. Mai Hr. Prof. Dr. A. Schiebel-Prag über »Schwingungen in Zahnrädergetrieben«.

Es wird nochmals daran erinnert, daß Anmeldungen für Vorträge auf der Hauptversammlung in Prag bis spätestens 15. Juli an den Geschäftsführer zu richten sind.

Aerodynamisches Institut in Aachen. Aus Anlaß der Eröffnung des neu erbauten aerodynamischen Instituts in Aachen sind von dessen Leiter, Prof. v. Kármán, in Gemeinschaft mit dem Rektor der T. H. eine Reihe von Fachvertretern zu einer wissenschaftlichen Zusammenkunft für den 26. bis 29. Juni eingeladen worden. Folgende Vorträge wurden angemeldet:

1. Betz (Göttingen): Ueber turbulente Reibungsschichten an gekrümmten Wänden.
2. Burgers (Delft): Geschwindigkeitsverteilung in schwach konvergenten und divergenten Kanälen.
3. Busemann (Göttingen): Ein Thema aus der Gasdynamik.
4. Douglas (Farnborough): The effect of high tip speeds on airscrew performance.
5. Glauert (Farnborough): Accelerated motion of aerofoils.
6. Goldstein (Cambridge-Göttingen): On the vortex theory of screw propellers.
7. Hartmann (Kobenhavn): Ein neuer akustischer Generator.
8. Hopf (Aachen): Bewegungstypen bei Steuern von Flugzeugen.
9. v. Kármán (Aachen): Beitrag zur Theorie des Auftriebes.
10. Koning (Amsterdam): Stabilitätsmessungen im Fluge (nach Messungen von v. d. Maas).
11. Kryloff und Bogolioubоff (Kieff): Sur la solution approchée du problème de Dirichlet.
12. Kryloff und Bogolioubоff (Kieff): Application de la méthode de l'algorithme variationel pour la solution approchée des équations différentielles aux dérivées partielles du type élliptique (Estimation des erreurs qu'on commet à la n-me approximation dans le calcul des valeurs et des fonctions singulières. Cas géneral de l'équation non homogène).
13. Lerbs (Hamburg): Zur Frage nach dem Kavitationseintritt.
14. Levi-Civita (Roma): Ueber eine Verallgemeinerung der Prandtlschen Grenzschichttheorie.
15. Lorenz (Aachen): Messungen an Flugzeugkühlern.
16. Misztal (Aachen): Schrägangeblasene Triebschrauben.
17. Nikuradse (Göttingen): Ueber Strömung in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen.

18. Prager (Darmstadt): Elastizitätseigenschaften verschiedener Hölzer des Flugzeugbaues.
19. Prandtl (Göttingen): Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz.
20. Rosenhead (Cambridge): Recent investigations into the Kármán street in a channel of finite breadth.
21. Roy (Paris): La propulsion au sein d'un fluide. Comparaison entre la fusée, l'hélice ordinaire et l'hélice à reaction.
22. Schiller (Leipzig): Rohrwiderstand bei hohen Reynoldsschen Zahlen.
23. Spannhake (Karlsruhe): Neue Darstellung der Potentialströmung durch Kreiselräder für beliebige Schaufelform.
24. Thom (Glasgow): Some studies of the flow past cylinders.
25. Toepfer (Karlsruhe): Die Störungen der Auftriebsverteilung eines Flugzeuges und ihre Erfassung durch graphische Verfahren.
26. Tollmien (Göttingen): Ueber die Entstehung der Turbulenz.
27. Trefftz (Dresden): Berechnung der Kurbelwellenschwingungen.

Preisverleihungen. Der Alfred Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis zur Förderung der mathematischen Wissenschaften ist für das Jahr 1928 durch das Preisgericht dem Direktor des Instituts für Meereskunde an der Universität Berlin, Herrn Prof. Dr. Albert Defant, für seine in dem Werk »Das Gezeitenproblem des Meeres in Landesnähe«, Hamburg 1925, zusammengefaßten Arbeiten zuerkannt worden.

Der von der Carl-Zeiß-Stiftung zu Jena begründete Ernst-Abbe-Gedächtnispreis und die damit verbundene Abbe-Medaille, die im Jahre 1928 zum ersten Male für Anwendungsgebiete der Mathematik und Physik zur Vergebung kommen sollten, sind nach dem Urteil des Preisgerichts (Prof. Hecker-Jena, Prof. Prandtl-Göttingen, Prof. Zenneck-München) dem Prof. Dr. Dr.-Ing. h. c. Alexander Meißner-Berlin, dem »Erfinder des Röhrengenerators«, zuerkannt worden.

Ausschreibung. Die Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin, schreibt einen Wettbewerb für eine wissenschaftliche Arbeit aus. Das Thema lautet: »Untersuchung über den Einfluß des Magnetismus auf Taschenuhren, über Schutzgehäuse und über die Methoden der Magnetisierung«. — Durch die Untersuchung sind die Ergebnisse der über diesen Gegenstand bereits ausgeführten Arbeiten zu erweitern. Die besondere Beschränkung auf einen Teil des Themas ist zulässig. Die Teilnahme ist offen für jedermann. Für die beste Arbeit wird ein Preis von 500 RM (fünfhundert Reichsmark) ausgesetzt. Die Arbeiten müssen spätestens am 1. Mai 1930 in einer für den Druck geeigneten Form bei der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik E. V., Berlin C 2, Breitestraße 8—9, eingehen. Es kommen nur solche Arbeiten in Frage, die bisher noch nicht veröffentlicht worden sind.

Preisrichter sind Prof. Dr. Angenheister Göttingen, Prof. Dr.-Ing. Bock, Hamburg, Prof. Dr. Göpel, Berlin-Charlottenburg, Fabrikbesitzer Otto Lange, Glashütte, Prof. Dr. Mahnkopf, Potsdam.

Photogrammetrie-Kongreß. Die vierte Hauptversammlung der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie findet am 25. und 26. Oktober in Berlin statt. Angemeldet sind bisher Vorträge von Hrn. Dr. Fuß-Sternwarte Neubabelsberg, über photogrammetrische Messungen mit Registrier-Theodoliten und von Herrn Dr.-Ing. Aschenbrenner-München, über die Ergebnisse von Versuchsmessungen mit der Panoramakammer der Photogrammetrie G. m. b. H., von Hrn. Ungewitter-Junkers Luftbildzentrale, über Erfahrungen im Luftbildwesen im Ausland.

Der dritte internationale Photogrammetrie-Kongreß findet als Hauptversammlung der Internationalen Gesellschaft für Photogrammetrie Anfang September 1930 in Zürich statt. Die Durchführung liegt in Händen der Schweizerischen Gesellschaft für Photogrammetrie. Anfragen betreffend Hauptversammlung und Kongreß sind an Regierungsrat Koerner-Bln.-Halensee, Karlsruher Str. 1, zu richten.

Persönliches. Hr. Dr.-Ing. Madelung, Vorstandsmitglied der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt e. V., bisher a. o. Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg ist zum o. Professor daselbst ernannt worden.

Der a. o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. Dresden, Herr Dr. B. Schilling, hat eine Berufung als o. Prof. a. d. Universität Santiago in Chile angenommen.

Am 15. April starb Hr. Reichsbahnoberrat Prof. Dr.-Ing. Rudolf Skutsch, der an der Technischen Hochschule Charlottenburg Vorlesungen über Kinematik gehalten und sich in früheren Jahren hauptsächlich durch Veröffentlichungen auf dem Gebiete der Riementriebe bekannt gemacht hatte.

Von der Technischen Hochschule Stuttgart wurden anläßlich der Jahrhundertfeier die Herren Stodola-Zürich und Finsterwalder-München zu Ehrenbürgern, Hr. Trefftz-Dresden zum Ehrendoktor ernannt. Aus dem gleichen Anlaß wurden von der Technischen Hochschule Zürich die Herren Emde und Grammel-Stuttgart zu Ehrendoktoren promoviert.

(Redaktionsschluß 30. Juni 1929.)

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Schade, Berlin N 65.